1 - (a) Verificare le ipotesi del teorema di esistenza globale per l'equazione differenziale

$$y' = x^2 - |y|\,.$$

(b) Tracciare un grafico approssimativo della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 - |y| \\ y(0) = 0\,. \end{cases} \tag{P}$$

(c) Determinare esplicitamente la soluzione di (P).

. . . .

(a) La funzione $f(x,y) = x^2 - |y|$ è continua in $\mathbf{R}^2$ e per ogni $(x,y_1)\,,(x,y_2) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left|x^2 - |y_1| - x^2 + |y_2|\right| = \left||y_2| - |y_1|\right| \le |y_1 - y_2|\,,$$

cioè f è globalmente lipschitziana in $\mathbf{R}^2$ rispetto alla seconda variabile y, uniformemente rispetto alla variabile x. Pertanto, per il teorema di esistenza globale le soluzioni di $y' = x^2 - |y|$ sono definite in tutto $\mathbf{R}$.
(b) Grazie al punto precedente, la soluzione di (P) è definita in tutto $\mathbf{R}$ e si noti che $y'(0) = 0$.
È utile osservare che $f(-x,-y) = f(x,y)$, e di conseguenza la soluzione è dispari. Infatti, posto $v(x) = -y(-x)$, si ha

$$v'(x) = y'(-x) = x^2 - |y(-x)| = x^2 - |v(x)|\,, \quad x \in \mathbf{R}\,, \qquad v(0) = 0\,,$$

e quindi per l'unicità della soluzione del problema (P) si ha $v = y$, cioè di $y(-x) = -y(x)$, per ogni $x \in \mathbf{R}$.
Per tracciare un grafico approssimativo, è utile studiare la monotonia delle soluzioni. Infatti, le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = x^2 - |y|$ sono strettamente crescenti per $|y| < x^2$, ovvero per $-x^2 < y < x^2$, mentre sono strettamente decrescenti per $|y| > x^2$, cioè $y > x^2$ oppure $y < -x^2$.
Poiché la soluzione $y(x)$ è dispari, basterà disegnare il suo grafico per $x > 0$.
Dallo studio della monotonia, segue che in un intorno destro di 0 la soluzione può avere due possibili andamenti: o $y(x)$ decresce e $y(x) < -x^2$, oppure $y(x)$ cresce e $0 < y(x) < x^2$. Si supponga per un momento che la soluzione abbia il primo andamento, e quindi $y(x) < -x^2$. Derivando l'equazione differenziale e tenendo conto di $y'(0) = 0$, si verifica facilmente che $y''(0) = 0$. Pertanto segue che

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = o(x^2)\,, \qquad x \to 0^+\,,$$

cioè $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)}{x^2} = 0$, e quindi in un intorno destro di 0 si avrebbe $|y(x)| < x^2$, da cui $y(x) > -x^2$, in evidente contrasto con la condizione $y(x) < -x^2$.
Allora necessariamente la soluzione $y(x)$ è strettamente crescente e $0 = y(0) < y(x) < x^2$. Inoltre, per ogni $x > 0$ $y(x)$ si mantiene sempre al di sotto della funzione x^2. Infatti, se esistesse un punto $x_0 > 0$ tale che $y(x_0) = x_0^2$, essendo $y'(x_0) = x_0^2 - y(x_0) = 0$ e $y(x) < x^2$ per $x < x_0$, si avrebbe un assurdo:

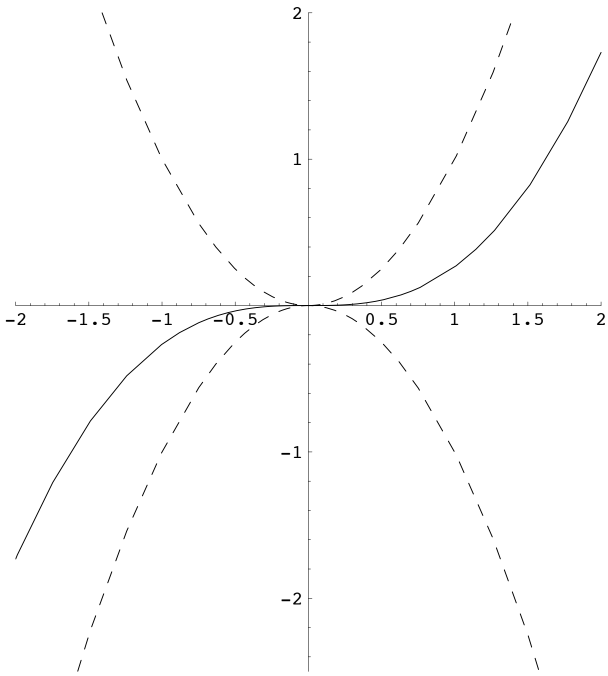
$$0 = y'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} \ge \lim_{x\to x_0^-} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = 2x_0 \qquad \text{contro} \quad x_0 > 0\,.$$

Infine, utilizzando il teorema dell'asintoto si può provare che

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty\,.$$

Infatti, essendo $y(x)$ strettamente crescente in $[0,+\infty)$, per il teorema sulla regolarità delle funzioni monotòne esiste il limite di $y(x)$ per $x \to +\infty$. Se fosse $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) \in \mathbf{R}$, si avrebbe $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y'(x) = +\infty$, in contrasto con il teorema dell'asintoto, e di conseguenza si ha necessariamente $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.

Grazie alle considerazioni fatte, si può tracciare il seguente grafico approssimativo della soluzione:



(c) In particolare, dal grafico della soluzione del problema (P) segue che $y(x) > 0$ per ogni $x > 0$, e quindi per determinare esplicitamente la soluzione, basta risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 - y & x \geq 0 \\ y(0) = 0\,, \end{cases}$$

e si ottiene $y(x) = -2e^{-x} + x^2 - 2x + 2$, $x \geq 0$.
In conclusione, tenendo conto della disparità, la soluzione di (P) è data da

$$y(x) = \begin{cases} -2e^{-x} + x^2 - 2x + 2 & \text{se } x \geq 0 \\ 2e^{x} - x^2 - 2x - 2 & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

---

2 - Scrivere l'integrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+4x^4}}\,dx$ come somma di una serie.

....

Per la serie binomiale si ha il seguente sviluppo in serie di potenze

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^n\,, \qquad |t| < 1\,,$$

dove i semifattoriali sono dati da

$$(2n)!! = 2^n n!\,, \qquad (2n-1)!! = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}\,.$$

Ponendo $t = 4x^4$, per l'unicità dello sviluppo in serie di potenze si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1+4x^4}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 4^n x^{4n}\,, \qquad |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Pertanto, osservato che $1/2 < 1/\sqrt{2}$, per il teorema di integrazione termine a termine si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+4x^4}}\,dx &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 4^n \int_0^{1/2} x^{4n}\,dx \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{4^n}{(4n+1)2^{4n+1}}\,. \end{aligned}$$

3 - Determinare, se esistono, il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 1$$

nell'insieme $C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

. . . .

La funzione f è continua in $\mathbf{R}^3$, e di conseguenza per il teorema di Weierstrass f ammette minimo assoluto e massimo assoluto nell'insieme compatto C.
Si osservi che $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, e di conseguenza si può applicare il teorema di Fermat: i punti di estremo interni a C sono necessariamente punti critici.
Per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = \big(2x, 2(y-1), 2z\big)\,,$$

e si annulla nel punto $P_1 = (0,1,0)$, che è interno a C. Si osservi che la matrice hessiana $D^2 f(x,y,z)$ è definita positiva per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, e di conseguenza P_1 è punto di minimo globale, cioè

$$\min_{(x,y,z)\in C} f(x,y,z) = \min_{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3} f(x,y,z) = f(P_1) = 0\,.$$

Si osservi che P_1 punto di minimo globale segue anche da $f(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + z^2 \geq 0 = f(P_1)$, per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.
Per determinare gli estremi di f sulla frontiera $\partial C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 2x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0\}$ di C, si può utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti di ∂C sono tutti regolari e la funzione lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 1 - \lambda(2x^2 + y^2 + z^2 - 2)\,,$$

e di conseguenza

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = \big(2x(1-2\lambda), 2(1-\lambda)y - 2, 2z(1-\lambda), -(2x^2 + y^2 + z^2 - 2)\big)\,.$$

Il sistema $\nabla \mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = \mathbf{0}$ è equivalente a

$$\begin{cases} x(1-2\lambda) = 0 \\ (1-\lambda)y - 1 = 0 \\ z(1-\lambda) = 0 \\ 2x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0\,. \end{cases}$$

Si osservi che dalla terza equazione segue $\lambda = 1$ o $z = 0$, ma dalla seconda equazione segue che $\lambda = 1$ non è possibile. Pertanto occorre risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ (1-\lambda)y - 1 = 0 \\ 2x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0 \\ \lambda = 1/2 \\ (1-\lambda)y - 1 = 0 \\ 2x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0\,. \end{cases}$$

Solo il primo sistema ha soluzioni $P_2 = (0, \sqrt{2}, 0)$ e $P_3 = (0, -\sqrt{2}, 0)$, mentre il secondo non ha soluzioni reali. Pertanto P_2 e P_3 sono i punti critici vincolati a ∂C.
In conclusione, per determinare il massimo assoluto di f nell'insieme compatto C si devono confrontare i valori

$$f(P_2) = 3 - 2\sqrt{2}\,, \qquad f(P_3) = 3 + 2\sqrt{2}\,,$$

e di conseguenza

$$\max_{(x,y,z)\in C} f(x,y,z) = f(P_3) = 3 + 2\sqrt{2}\,.$$