1 - Calcolare il gradiente della funzione

$$f(x,y) = xe^{x\sqrt{2y}}\,.$$

.....

Il gradiente è dato da

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{x\sqrt{2y}} + x\sqrt{2y}e^{x\sqrt{2y}}, \frac{x^2}{\sqrt{2y}}e^{x\sqrt{2y}}\right).$$

---

2 - Studiare l'assoluta convergenza e la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$.

.....

La serie è a termini di segno alterno, in quanto $1-\cos\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}} \geq 0$ per ogni $n \geq 1$.
In forza di

$$1-\cos\frac{1}{\sqrt[4]{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}(1+o(1)) \qquad n \to +\infty\,,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$ ha lo stesso carattere di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$, e quindi la serie assegnata non è assolutamente convergente.
Per quanto riguarda la semplice convergenza, essendo la serie è a termini di segno alterno, si può applicare il criterio di Leibniz. In particolare, si noti che la successione $\left\{1-\cos\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\right\}$ è monotòna decrescente, poiché la funzione $\cos x$ è monotòna decrescente nell'intervallo $[0,\pi/2]$ e la succesione $\left\{\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\right\}$ è monotòna decrescente.
In conclusione, essendo la successione $\left\{1-\cos\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\right\}$ infinitesima e monotòna decrescente, per il criterio di Leibniz la serie assegnata converge.

---

3 - Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali ogni soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale $y' + \alpha y = 2$ verifica la condizione $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{7x}y(x) = 0$.

.....

Per ogni $\alpha \neq 0$ l'integrale generale è dato da

$$y(x) = Ce^{-\alpha x} + \frac{2}{\alpha} \qquad C \in \mathbb{R}\,,$$

mentre per $\alpha = 0$ è

$$y(x) = 2x + C \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

La condizione assegnata è verificata per ogni $\alpha < 7$.

---

4 - Data la funzione $f(x) = \displaystyle\int_1^x |t|e^{-t}\,dt$ determinare:
(i) l'insieme di definizione, gli intervalli di monotonia, gli intervalli di convessità, eventuali punti di flesso;
(ii) i limiti agli estremi del dominio, calcolando esplicitamente l'integrale.
(iii) Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

.....

(i) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, grazie alla continuità della funzione integranda.
Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la derivata prima di f è data da

$$f'(x) = |x|e^{-x} = \begin{cases} xe^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ \\ -xe^{-x} & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Si osservi che $f'(x) = 0$ solo per $x = 0$. Dallo studio del segno di f' segue che f è strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$.
La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x}(1-x) & \text{se } x > 0 \\ \\ e^{-x}(x-1) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e quindi la funzione è convessa in $]0,1[$ ed è concava in $]-\infty,0[$ e $]1,\infty[$. Si noti che f non è due volte derivabile in 0 e 0, 1 sono punti di flesso per f.

(ii) Integrando per parti si ha

$$\int te^{-t}\,dt = -e^{-t}(t+1) + C\,.$$

Pertanto, per ogni $x > 1$ si ha

$$f(x) = \int_1^x te^{-t}\,dt = -e^{-x}(x+1) + \frac{2}{e}\,,$$

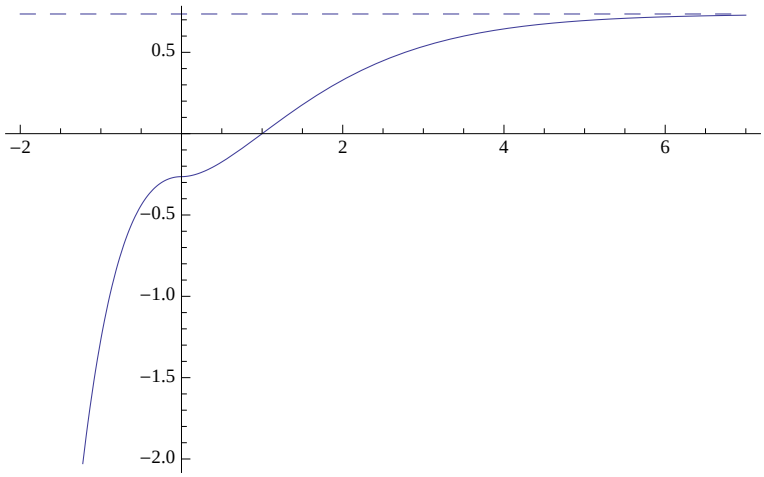
e di conseguenza

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2}{e}\,.$$

Inoltre, per ogni $x < 0$ si ha

$$f(x) = -\int_x^1 |t|e^{-t}\,dt = \int_x^0 te^{-t}\,dt - \int_0^1 te^{-t}\,dt = e^{-x}(1+x) + \frac{2}{e} - 2\,,$$

e di conseguenza

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,.$$

(iii) Si noti che $f(1) = 0$ e $f(0) = \dfrac{2}{e} - 1 < 0$.
Un grafico qualitativo della funzione $f(x)$ è il seguente.