

1 - Scrivere il numero complesso $(1 - i)^2$ in forma esponenziale.

.....

Si può scrivere

$$(1 - i)^2 = -2i = 2e^{i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} \quad k \in \mathbb{Z},$$

o anche

$$1 - i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}, \quad (1 - i)^2 = 2e^{i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2 - Calcolare l'integrale $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{|x| + 1} dx$.

.....

Grazie alla parità della funzione integranda si ha $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{|x| + 1} dx = 2 \int_0^1 \frac{x^2}{x + 1} dx$.

Si osservi che

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{x + 1} dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x + 1}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \log(x + 1)\right]_0^1 = \log 2 - \frac{1}{2}.$$

In conclusione

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{|x| + 1} dx = 2 \log 2 - 1.$$

3 - Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}-x} + \cos \sqrt{x} - 2 - \sqrt{x}}{\log(1 + \pi x)}$.

.....

Tenendo conto dello sviluppo della funzione al denominatore

$$\log(1 + \pi x) = \pi x + o(x) \quad x \rightarrow 0,$$

è opportuno scrivere lo sviluppo della funzione al numeratore a meno di infinitesimi di ordine superiore a x per $x \rightarrow 0^+$. Infatti, in forza di

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad t \rightarrow 0,$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad t \rightarrow 0,$$

si ha

$$e^{\sqrt{x}-x} = 1 + \sqrt{x} - x + \frac{x}{2} + o(x) = 1 + \sqrt{x} - \frac{x}{2} + o(x) \quad x \rightarrow 0^+,$$

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x) \quad x \rightarrow 0^+,$$

e di conseguenza

$$e^{\sqrt{x}-x} + \cos \sqrt{x} - 2 - \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x} - \frac{x}{2} + 1 - \frac{x}{2} - 2 - \sqrt{x} + o(x) = -x + o(x) \quad x \rightarrow 0^+.$$

In conclusione

$$\frac{e^{\sqrt{x}-x} + \cos \sqrt{x} - 2 - \sqrt{x}}{\log(1 + \pi x)} = \frac{-x + o(x)}{\pi x + o(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\pi}.$$

4 - Determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^2 - x \log(y + 1)$ nell'insieme $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

.....

La funzione f è continua in D , insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$, e quindi per il teorema di Weierstrass f ha minimo assoluto e massimo assoluto in D .

Il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x, y) = (2x - \log(y + 1), -\frac{x}{y + 1}), \quad (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[,$$

e di conseguenza si annulla solo in $(0, 0)$, ma $(0, 0) \notin]0, 1[\times]0, 1[$.

Si deve valutare la funzione sul bordo del quadrato:

$$f(x, 0) = x^2 \quad x \in [0, 1],$$

e quindi, essendo la funzione crescente, gli unici punti da prendere in considerazione sono i vertici $(0, 0)$ e $(1, 0)$;

$$f(1, y) = 1 - \log(y + 1) \quad y \in [0, 1],$$

e quindi, essendo la funzione decrescente, l'unico punto da prendere in considerazione è il vertice $(1, 1)$;

$$f(x, 1) = x^2 - x \log 2 \quad x \in [0, 1],$$

e quindi, poiché $f'(x, 1) = 2x - \log 2 = 0$ per $x = \log 2 / 2 \in]0, 1[$, occorre tener conto di $(\log 2 / 2, 1)$ e del vertice $(0, 1)$. Infine

$$f(0, y) = 0 \quad y \in [0, 1].$$

In conclusione, confrontando i valori che f assume nei quattro vertici del quadrato e nel punto $(\log 2 / 2, 1)$,

$$f(0, 0) = 0, \quad f(1, 0) = 1, \quad f(1, 1) = 1 - \log 2, \quad f(0, 1) = 0, \quad f(\log 2 / 2, 1) = -\frac{\log^2 2}{4},$$

si ha $\min_{(x,y) \in D} f(x, y) = f(\log 2 / 2, 1) = -\frac{\log^2 2}{4}$ e $\max_{(x,y) \in D} f(x, y) = f(1, 0) = 1$.

5 - Data la funzione

$$f(x) = |e^{x^2-x} - 1|$$

determinare il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali punti di non derivabilità, gli intervalli di monotonia, eventuali massimi e minimi e gli intervalli di convessità. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

La funzione f è definita, continua e positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si noti che

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2-x} - 1 & \text{se } x \leq 0 \text{ o } x \geq 1 \\ 1 - e^{x^2-x} & \text{se } 0 < x < 1, \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x^2-x} - 1) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x^2-x} - 1) = +\infty.$$

La derivata prima di f è data da

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x^2-x}(2x-1) & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 1 \\ -e^{x^2-x}(1-2x) & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

La funzione f non è derivabile nei punti 0 e 1, in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x).$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0[$ ed è strettamente crescente in $]1, +\infty)$.

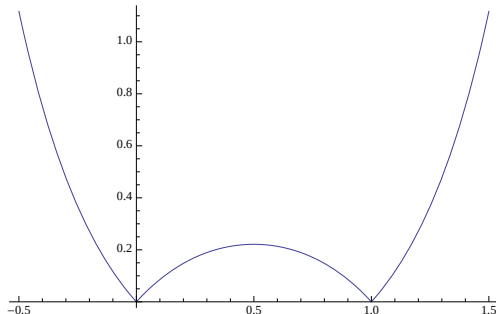
Nell'intervallo $]0, 1[$ si ha $f'(x) = 0$ solo per $x = \frac{1}{2}$ e la funzione risulta crescente in $]0, 1/2[$ e decrescente in $]1/2, 1[$; di conseguenza $x = \frac{1}{2}$ è punto di massimo locale e $f(1/2) = 1 - e^{-1/4}$ è il massimo locale. Si noti che $0 = f(0) = f(1)$ è il minimo assoluto di f .

La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \begin{cases} e^{x^2-x}((2x-1)^2 + 2) & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 1 \\ -e^{x^2-x}((2x-1)^2 + 2) & \text{se } 0 < x < 1, \end{cases}$$

e quindi la funzione è convessa in $(-\infty, 0[$ e in $]1, \infty)$, ed è concava in $]0, 1[$.

Un grafico qualitativo della funzione $f(x)$ è il seguente.



Si può giungere alle stesse conclusioni semplicemente studiando dapprima la funzione

$$g(x) = e^{x^2-x} - 1,$$

e successivamente prendendone il modulo.