1 - Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big|\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\Big|\, dx\,.$

. . . .

Si osservi che

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big|\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\Big|\, dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/6} \Big(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x\Big)\, dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \Big(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\Big)\, dx \\ &= \Big[\frac{x}{2} + \cos x\Big]_{-\pi/2}^{\pi/6} - \Big[\cos x + \frac{x}{2}\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\,.\end{aligned}$$

---

2 - Studiare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\Big(1 + \frac{1}{2n^2 - n}\Big)\,.$

. . . .

La serie è a termini positivi. In forza di

$$\log\Big(1 + \frac{1}{2n^2 - n}\Big) = \frac{1}{n^2}\Big(\frac{1}{2} + o(1)\Big) \qquad n \to +\infty\,,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, e quindi converge.

---

3 - (a) Determinare per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - \alpha^2 y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -\alpha\,. \end{cases}$

(b) Determinare i valori del parametro α per i quali è verificata la condizione $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{x\sqrt{\pi}} y(x) = 0.$

. . . .

(a) La soluzione è data da

$$y(x) = e^{-\alpha x}\,.$$

(b) La condizione assegnata è verificata per ogni $\alpha > \sqrt{\pi}$.

---

4 - Data la funzione $\displaystyle f(x) = \frac{e^x}{|x-1| - 1}$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali punti di non derivabilità, gli intervalli di monotonia, eventuali punti di minimo e punti di massimo, gli intervalli di convessità. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.
Si può applicare il teorema di Fermat alla funzione f nel punto $x = 1$? Giustificare la risposta.

. . . .

La funzione $f(x)$ è definita per $|x - 1| \neq 1$, cioè $x \neq 0$ e $x \neq 2$. Si osservi che

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{e^x}{x} & \text{se } \ x \le 1,\ x \neq 0 \\ \dfrac{e^x}{x-2} & \text{se } \ x > 1,\ x \neq 2 \end{cases}$$

e la funzione è continua in 1 con $f(1) = -e$. Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = -\lim_{x\to0^-} \frac{e^x}{x} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = -\lim_{x\to0^+} \frac{e^x}{x} = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{e^x}{x-2} = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{e^x}{x-2} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x-2} = +\infty\,,$$

e di conseguenza la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale e le rette di equazioni $x = 0$ e $x = 2$ sono asintoti verticali.
La derivata prima è data da

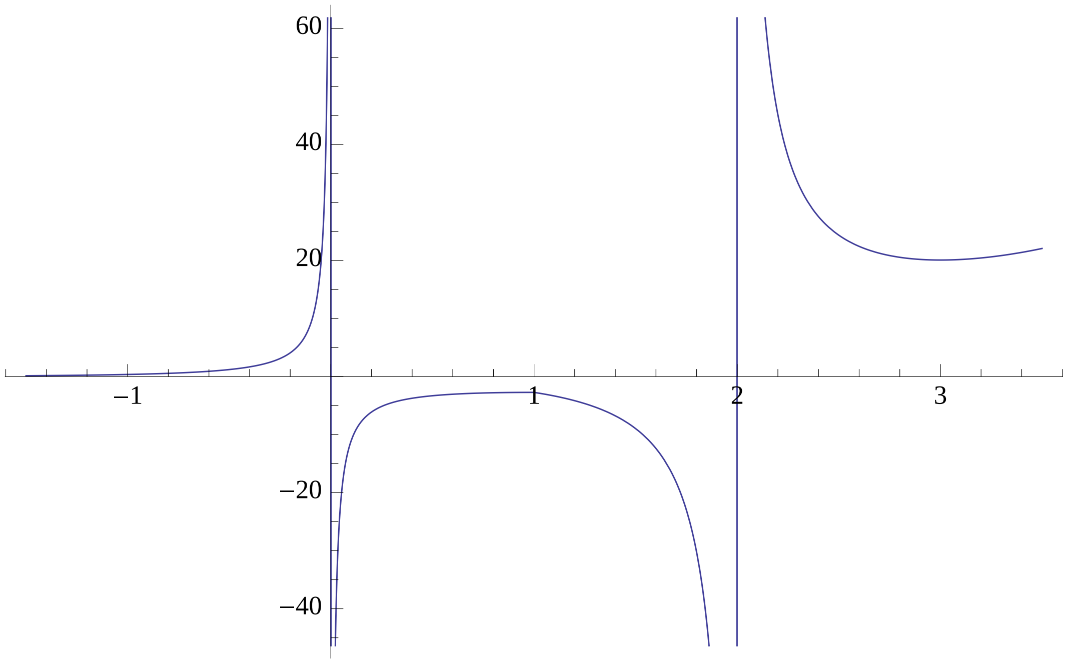
$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x-1}{x^2} e^x & \text{se } \ x < 1,\ x \neq 0, \\ \dfrac{x-3}{(x-2)^2} e^x & \text{se } \ x > 1,\ x \neq 2. \end{cases}$$

Si noti che f non è derivabile in 1, in quanto $f'_-(1) = 0$ mentre $f'_+(1) = -2e$.

Si ha che $f'(x) = 0$ solo per $x = 3$. Dallo studio del segno di f' segue che f è strettamente crescente in $]-\infty, 0[$, in $]0, 1[$ e in $]3, \infty[$, mentre è strettamente decrescente in $]1, 2[$ e in $]2, 3[$. Pertanto, $x = 1$ è punto di massimo relativo e $f(1) = -e$ è il massimo relativo e $x = 3$ è punto di minimo relativo e $f(3) = e^3$ è il minimo relativo.
La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^3} e^x & \text{se } \ x < 1, \ x \neq 0, \\ \dfrac{x^2 - 6x + 10}{(x-2)^3} e^x & \text{se } \ x > 1, \ x \neq 2. \end{cases}$$

e quindi la funzione è convessa in $]-\infty, 0[$ e in $]2, \infty[$, mentre è concava in $]0, 1[$ e in $]1, 2[$.
Un grafico qualitativo della funzione $f(x)$ è il seguente.



La funzione f non verifica le ipotesi del Teorema di Fermat nel punto 1, in quanto f non è derivabile in 1.