1 - Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali il limite $\lim_{x\to 2^+} (x-2)^\alpha \log(x-1)$ è un numero reale diverso da zero.

. . . . . .

Posto $y = x - 2$, il limite assegnato diventa

$$\lim_{y\to 0^+} y^\alpha \log(y+1) = \lim_{y\to 0^+} y^{\alpha+1} \frac{\log(y+1)}{y}\,,$$

e di conseguenza solo per $\alpha = -1$ tale limite risulta finito e diverso da zero, e vale 1.

---

2 - Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^3 \arctan\sqrt{x}\; dx\,.$

. . . . . .

Integrando dapprima per sostituzione con $t = \sqrt{x}$ e successivamente per parti, si ha

$$\begin{aligned}\int_0^3 \arctan\sqrt{x}\; dx &= 2\int_0^{\sqrt{3}} t\arctan t\; dt = [t^2\arctan t]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2}\; dt \\ &= \pi - \int_0^{\sqrt{3}} \Big(1 - \frac{1}{1+t^2}\Big)\; dt = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\,.\end{aligned}$$

---

3 - Determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione $f(x,y) = e^{x^2+y^2} - y^2$ nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le \pi\}$.

. . . . . .

La funzione f è continua in D, insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$, e quindi per il teorema di Weierstrass f ha minimo assoluto e massimo assoluto in D.
Il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x,y) = \big(2xe^{x^2+y^2}, 2y(e^{x^2+y^2} - 1)\big)\,, \qquad (x,y) \in \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 < \pi\}\,,$$

e di conseguenza si annulla solo in $(0,0)$.
Si deve ora valutare la funzione sulla circonferenza $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = \pi\}$:

$$g(y) = e^\pi - y^2\,, \qquad |y| \le \sqrt{\pi}\,.$$

Poiché $g'(y) = -2y$, i punti da prendere in considerazione sono $y = 0$ e $y = \pm\sqrt{\pi}$.
In conclusione, confrontando i valori

$$f(0,0) = 1, \qquad f(\pm\sqrt{\pi}, 0) = e^\pi, \qquad f(0, \pm\sqrt{\pi}) = e^\pi - \pi$$

e tenendo anche conto di $e^\pi - \pi > 1$, si ha $\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = f(0,0) = 1$ e $\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = f(\pm\sqrt{\pi}, 0) = e^\pi$.

---

4 - Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{1+\log x}$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia, eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità, eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.
Dimostrare che $f(x)$ è estendibile per continuità in 0 e che tale estensione risulta anche derivabile a destra in 0.

. . . . . .

La funzione $f(x)$ è definita per $x > 0$ e $\log x \neq -1$, cioè $x \neq e^{-1}$.
Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to \frac{1}{e}^-} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to \frac{1}{e}^+} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

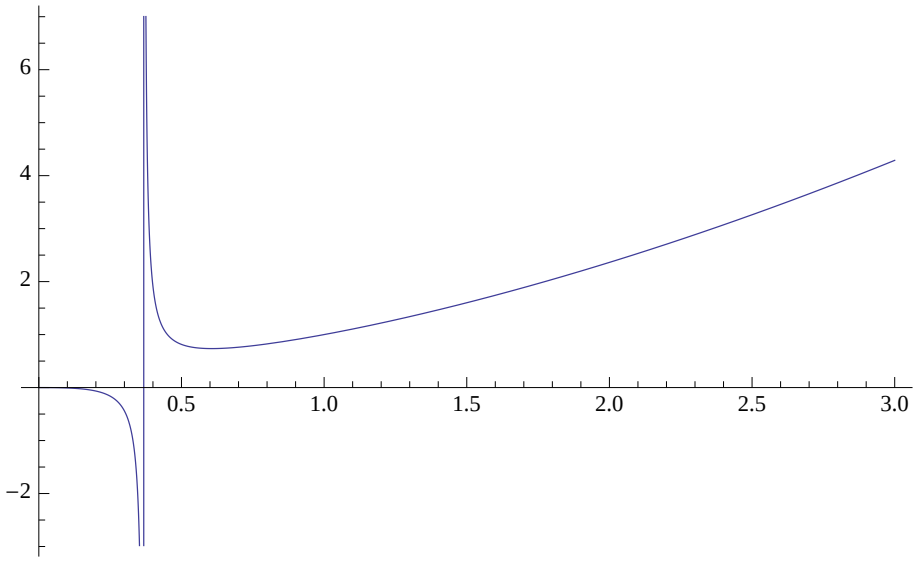
In particolare, la funzione si può prolungare per continuità in 0 se si pone $f(0) = 0$ e la retta di equazione $x = \dfrac{1}{e}$ è un asintoto verticale per f.
La derivata prima di $f(x)$ è data da

$$f'(x) = \frac{x(2\log x + 1)}{(1+\log x)^2}\,, \qquad x > 0,\ x \neq e^{-1}\,.$$

Inoltre

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{x}{1+\log x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0\,,$$

e quindi f è derivabile a destra in 0 e $f'_+(0) = 0$.
Si osservi che $f'(x) = 0$ per $x = e^{-1/2}$. Dallo studio del segno di f' segue che f è strettamente decrescente in $]0, e^{-1}[$ e in $]e^{-1}, e^{-1/2}[$, mentre è strettamente crescente in $]e^{-1/2}, \infty[$; di conseguenza $x = e^{-1/2}$ è punto di minimo relativo e $f(e^{-1/2}) = \dfrac{2}{e}$ è il minimo relativo. La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \frac{2\log^2 x + \log x + 1}{(1+\log x)^3}\,, \qquad x > 0,\ x \neq e^{-1}\,.$$

Poiché $2\log^2 x + \log x + 1 > 0$ per ogni $x > 0$, la funzione è concava in $]0, e^{-1}[$, mentre è convessa in $]e^{-1}, \infty[$.
Un grafico qualitativo della funzione $f(x)$ è il seguente.