

1 - Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3n^2 - 1}$.

In forza di

$$\frac{\sqrt{n}}{3n^2 - 1} = \frac{1}{3n^{3/2}}(1 + o(1)) \quad n \rightarrow +\infty,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$, e quindi è convergente.

2 - Calcolare l'integrale $\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{x+1} dx$.

Se si integra per sostituzione, ponendo $t = \sqrt{x}$, si ottiene

$$\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{x+1} dx = 2 \int_0^1 \frac{t^4}{t^2+1} dt = 2 \int_0^1 \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} - t + \arctan t \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}.$$

3 - Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali ogni soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale $y' - 2y = x$ verifica la condizione $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$.

L'integrale generale è dato da

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \right) \quad C \in \mathbb{R}.$$

La condizione assegnata è verificata per ogni $\alpha < -2$.

4 - Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = y \sin(x^3 + y)$ nel punto $(0, \pi)$.

Il gradiente di f nel generico punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è dato da

$$\nabla f(x, y) = \left(3x^2 y \cos(x^3 + y), \sin(x^3 + y) + y \cos(x^3 + y) \right),$$

e di conseguenza

$$\nabla f(0, \pi) = (0, -\pi).$$

5 - Data la funzione $f(x) = x^{3/2} \log x$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia, eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità, eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

La funzione $f(x)$ è definita per $x > 0$, è negativa in $]0, 1[$ e positiva in $]1, \infty[$.

Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

La derivata prima di $f(x)$ è data da

$$f'(x) = \sqrt{x} \left(\frac{3}{2} \log x + 1 \right), \quad x > 0,$$

e quindi si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$. Questa osservazione è utile quando si deve disegnare il grafico di $f(x)$.

Si osservi che $f'(x) = 0$ per $x = e^{-2/3}$. Dallo studio del segno di f' segue che f è strettamente decrescente in $]0, e^{-2/3}[$, mentre è strettamente crescente in $]e^{-2/3}, \infty[$; di conseguenza $x = e^{-2/3}$ è punto di minimo assoluto e $f(e^{-2/3}) = -\frac{2}{3e}$ è il minimo assoluto.

La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{3}{2} \log x + 4 \right), \quad x > 0.$$

Pertanto, la funzione è concava in $]0, e^{-8/3}[$, è convessa in $]e^{-8/3}, \infty[$ e il punto $x = e^{-8/3}$ è di flesso. Un grafico qualitativo della funzione $f(x)$ è il seguente.

