

# Esercizi e appunti per il corso di Fisica Matematica

Laurea Specialistica in Ingegneria Meccanica

E.N.M. Cirillo – A.A. 2004–2005

## 1. Trasformata di Fourier

Si introduce la trasformata integrale di Fourier per le funzioni sommabili sull'asse reale e se ne discutono proprietà e metodi di calcolo.

### 1.2. Trasformata di Fourier

Sia  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua a tratti su  $I$ ; si dice che  $f$  è *assolutamente integrabile* o *sommabile* su  $I$  se e solo se esiste l'integrale

$$\int_I |f(x)| dx < +\infty$$

L'insieme delle funzioni sommabili su  $I$  viene denotato con il simbolo  $\mathcal{L}^1(I)$ ; ovviamente ha senso considerare  $I = \mathbb{R}$ .

Sia  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  una funzione sommabile su  $\mathbb{R}$ , si definisce *trasformata di Fourier* di  $f$  la funzione  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$F(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (1.2)$$

per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$ . La definizione è ben posta infatti si dimostra che l'integrale (1.2) esiste finito per ogni  $\omega$ :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-i\omega x} f(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \leq +\infty$$

**Esempio 1.2.** Impulso rettangolare. Siano dati due numeri reali  $a < b$ ; si calcola la trasformata di Fourier  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  della funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(x) = 1$  se  $a \leq x \leq b$  e  $f(x) = 0$  altrove. Per  $\omega = 0$  si ha

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b dx = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}$$

Sia, ora,  $\omega \neq 0$  si ha

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-i\omega x} dx = -\frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega x} \Big|_a^b = \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{i\omega\sqrt{2\pi}}$$

La funzione  $F$  è continua in  $\mathbb{R}$ ; il risultato è ovvio ovunque tranne che in  $\omega = 0$ , ove segue dall'osservazione seguente:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - i\omega a + o(\omega^2) - [1 - i\omega b + o(\omega^2)]}{i\omega} = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} = F(0)$$

Si mostra anche che la funzione  $F$  è infinitesima all'infinito, infatti

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{|e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}|}{|\omega|} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{|e^{-i\omega a}| + |e^{-i\omega b}|}{|\omega|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{|\omega|} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$$

Ove si è usata la disuguaglianza triangolare. Si osserva che le proprietà di  $F$  sono in realtà del tutto generali; si veda il Teorema 1.5 seguente.

**Esempio 1.3.** Impulso rettangolare simmetrico. Sia dato il numero reale  $\lambda > 0$ ; si calcola la trasformata di Fourier  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  della funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(x) = 1$  se  $-\lambda \leq x \leq \lambda$  e  $f(x) = 0$  altrove. Applicando i risultati ottenuti nell'Esempio 1.2 al caso  $a = -\lambda$  e  $b = \lambda$ , si ha

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega\lambda} - e^{-i\omega\lambda}}{i\omega} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\omega\lambda)}{\omega}$$

Si osserva che la funzione  $F$  è reale e pari; ciò è dovuto alla parità della funzione  $f$ ; si veda il Teorema 1.6 seguente. Si osserva, infine, che la funzione  $f$  ha larghezza  $\lambda$ , mentre la sua trasformata ha larghezza  $2\pi/\lambda$ : la larghezza della trasformata è dell'ordine dell'inverso della larghezza della trasformanda.

**Esempio 1.4.** Si calcola la trasformata di Fourier della funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(x) = \exp\{-x\}$  se  $x > 0$  e  $f(x) = 0$  se  $x < 0$ .

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-i\omega x} e^{-x} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)} e^{-(1+i\omega)x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)}$$

ove si è usato che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |e^{-x(1+i\omega)}| = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x(1+i\omega)} = 0$$

Si osserva che la funzione  $F$  è continua, limitata e infinitesima all'infinito; si veda il Teorema 1.5 seguente.

Si enuncia, ora, un teorema che esprime le proprietà fondamentali della funzione  $F(\omega)$ ; in particolare si enuncia il Lemma di Riemann-Lebesgue (1.3).

**Teorema 1.5** (proprietà della trasformata di Fourier) *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione sommabile, la sua trasformata di Fourier  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è continua e limitata. Se, inoltre,  $f$  è continua a tratti la funzione  $F$  è infinitesima all'infinito, ovvero*

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} |F(\omega)| = 0 \tag{1.3}$$

*Dimostrazione del Teorema 1.5.* Continuità: sia  $\{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$  una successione di numeri reali convergente a  $\omega \in \mathbb{R}$ ; si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F(\omega_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_n x} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-i\omega_n x} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = F(\omega) \end{aligned}$$

Ove è stato possibile scambiare il limite con l'integrale in virtù del Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata che è applicabile dal momento che la successione integranda può essere maggiorata da una funzione sommabile, infatti  $|e^{-i\omega_n x}| \leq |f(x)|$  e  $f$  è sommabile.

La limitatezza segue dalla sommabilità della funzione trasformanda  $f$ , infatti si ha che per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$

$$|F(\omega)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-i\omega x} f(x)| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \leq \frac{K}{\sqrt{2\pi}}$$

ove si è introdotto il numero reale positivo  $K := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ .

Per studiare il comportamento all'infinito della trasformata di Fourier si spezza l'integrale che definisce la trasformata nella sua parte reale e in quella immaginaria:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \omega x dx - i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \omega x dx$$

Quindi  $F(\omega) = [I(\omega) - iJ(\omega)]/\sqrt{2\pi}$  ove si è posto

$$I(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \omega x dx \quad \text{e} \quad J(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \omega x dx$$

Si mostra, ora, che le funzioni  $I(\omega)$  e  $J(\omega)$  sono infinitesimi all'infinito; in realtà si esegue il calcolo solo per  $I$ , per  $J$  si procede in modo analogo. Si esegue la sostituzione  $y = x + \pi/\omega$ :

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(y - \frac{\pi}{\omega}\right) \cos \left[\omega\left(y - \frac{\pi}{\omega}\right)\right] dy = - \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(y - \frac{\pi}{\omega}\right) \cos \omega y dy$$

Sommando membro a membro l'uguaglianza precedente con quella che definisce l'integrale  $I(\omega)$  si ha

$$2I(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ f(y) - f\left(y - \frac{\pi}{\omega}\right) \right] \cos \omega y dy \implies I(\omega) = \frac{1}{2} \int_E \left[ f(y) - f\left(y - \frac{\pi}{\omega}\right) \right] \cos \omega y dy$$

ove  $E := \{y \in \mathbb{R} : f \text{ è continua in } y\}$ . Si ha, infine,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |I(\omega)| \leq \int_E \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| f(y) - f\left(y - \frac{\pi}{\omega}\right) \right| \cos \omega y dy = 0$$

ove si è usata la continuità di  $f$  su  $E$ , aperto, e si è scambiato il limite con l'integrale in forza del Teorema sulla convergenza dominata la cui applicabilità si giustifica come segue:

$$\left| \left[ f(y) - f\left(y - \frac{\pi}{\omega}\right) \right] \cos \omega y \right| \leq |f(y)| + \left| f\left(y - \frac{\pi}{\omega}\right) \right|$$

e si osserva che la funzione al secondo membro è sommabile.

Teorema 1.5  $\square$

**Teorema 1.6** (proprietà di simmetria della trasformata di Fourier) *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione sommabile e  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la sua trasformata di Fourier. Si ha:*

1.  $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$ ; 2.  $f$  pari  $\implies F$  reale e pari 3.  $f$  dispari  $\implies F$  immaginaria e dispari

*Dimostrazione del Teorema 1.6.* Punto 1: sia  $\omega \in \mathbb{R}$ , si ha

$$F(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{e^{-i\omega x}} f(x) dx = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx} = \overline{F(\omega)}$$

ove si è usato che  $f$  è una funzione a valori reali.

Punto 2: per ipotesi si ha che  $f(-x) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , allora effettuando la sostituzione  $y = -x$  si ha

$$\sqrt{2\pi} \overline{F(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x) dx = - \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-i\omega y} f(-y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega y} f(y) dy = \sqrt{2\pi} F(\omega)$$

Si ha quindi che  $F(\omega)$  è reale, infatti un numero complesso è reale se e solo se coincide con il suo complesso coniugato. Inoltre usando questo risultato e quello dimostrato al punto 1 si ha che:  $F(-\omega) = \overline{F(\omega)} = F(\omega)$ .

Punto 3: per ipotesi si ha che  $f(-x) = -f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , allora effettuando la sostituzione  $y = -x$  si ha

$$\sqrt{2\pi} \overline{F(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x) dx = - \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-i\omega y} f(-y) dy = - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega y} f(y) dy = -\sqrt{2\pi} F(\omega)$$

Si ha quindi che  $F(\omega)$  è immaginario, infatti un numero complesso è immaginario se e solo se è opposto al suo complesso coniugato. Inoltre usando questo risultato e quello dimostrato al punto 1 si ha che:  $F(-\omega) = \overline{F(\omega)} = -F(\omega)$ .

Teorema 1.6  $\square$

**Esempio 1.7.** Si calcola la trasformata di Fourier della funzione  $f(x) = \exp\{-\lambda|x|\}$  con  $\lambda > 0$ ; dal momento che  $f$  è pari in virtù del Teorema 1.6 ci si aspetta che la sua trasformata sia reale e pari. Infatti,

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} e^{-\lambda|x|} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-(i\omega-\lambda)x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-(i\omega+\lambda)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}$$

ove sono stati omessi gli ultimi passaggi perché molto simili a quelli svolti nell'ambito dell'Esempio 1.4.

**Esempio 1.8.** Impulso d'onda quadrata. Sia  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ , si calcola la trasformata di Fourier della funzione  $f(x) = -1$  se  $-\lambda \leq x \leq 0$ ,  $f(x) = 1$  se  $0 \leq x \leq \lambda$  e  $f(x) = 0$  altrove. Dal momento che  $f$  è dispari, in virtù del Teorema 1.6, ci si aspetta che la sua trasformata sia immaginaria e dispari. Infatti,

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^0 e^{-i\omega x} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega} (e^{-i\omega\lambda} + e^{i\omega\lambda} - 2) = -\frac{2i}{\omega\sqrt{2\pi}} (\cos\omega\lambda - 1)$$

Si osserva che la funzione  $F$  è continua, limitata e infinitesima all'infinito, si veda il Teorema 1.5, infatti

$$|F(\omega)| = \left| -\frac{2i}{\omega\sqrt{2\pi}} (\cos\omega\lambda - 1) \right| = \frac{2}{|\omega|\sqrt{2\pi}} |\cos\omega\lambda - 1| \leq \frac{2}{|\omega|\sqrt{2\pi}} (|\cos\omega\lambda| + 1) \leq \frac{4}{|\omega|\sqrt{2\pi}} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$$

ove si è usata la disuguaglianza triangolare e l'ovvio risultato che il modulo del coseno di un numero reale è stimato dall'alto da uno.

**Esempio 1.9.** Impulso d'onda triangolare. Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  e sia  $a > 0$ ; si calcola la trasformata di Fourier della funzione  $f(x) = bx/a$  se  $|x| \leq a$  e  $f(x) = 0$  altrove. Dal momento che  $f$  è dispari, in virtù del Teorema 1.6, ci si aspetta che la sua trasformata sia immaginaria e dispari. Infatti,

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-i\omega x} \frac{b}{a} x dx = \frac{b}{a\sqrt{2\pi}} \left[ -\frac{1}{i\omega} x e^{-i\omega x} \Big|_{-a}^a + \frac{1}{i\omega} \int_{-a}^a e^{-i\omega x} dx \right] = \frac{2bi}{a\omega\sqrt{2\pi}} \left( a \cos\omega a + \frac{1}{\omega} \sin\omega a \right)$$

ove si è proceduto all'integrazione per parti e si sono omessi i passaggi algebrici più elementari. Si osserva che la funzione  $F$  è continua, limitata e infinitesima all'infinito, si veda il Teorema 1.5, infatti

$$|F(\omega)| = \frac{2|b|}{a|\omega|\sqrt{2\pi}} \left| a \cos\omega a + \frac{1}{\omega} \sin\omega a \right| \leq \frac{2|b|}{a|\omega|\sqrt{2\pi}} \left( a |\cos\omega a| + \frac{1}{|\omega|} |\sin\omega a| \right) \leq \frac{2|b|}{a|\omega|\sqrt{2\pi}} \left( a + \frac{1}{|\omega|} \right) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$$

ove si è usata la disuguaglianza triangolare e l'ovvio risultato che il modulo del seno e del coseno di un numero reale è stimato dall'alto da uno.

La trasformata di Fourier può essere pensata come un operatore che associa a una funzione  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  la funzione  $\mathcal{F}(f) := F$  ove  $F$  è la funzione  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita dalla (1.2). È naturale chiedersi cosa succede alla funzione  $\mathcal{F}(f)$  se compio operazioni sulla funzione di partenza  $f$ , per esempio se la sommo a una seconda funzione o la moltiplico per uno scalare.

**Teorema 1.10** (proprietà operatoriali della trasformata di Fourier) *Sia  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  e  $F := \mathcal{F}(f)$  la trasformata di Fourier. Allora*

1. l'operatore  $\mathcal{F}$  è lineare nel senso che per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  si ha  $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$ ;
2. sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $g : x \in \mathbb{R} \rightarrow g(x) := f(x - x_0) \in \mathbb{R}$ , allora posto  $G := \mathcal{F}(g)$  si ha che  $G(\omega) = e^{-i\omega x_0} F(\omega)$  per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$ ;
3. sia  $a \in \mathbb{R}$  e  $g : x \in \mathbb{R} \rightarrow g(x) := f(ax) \in \mathbb{R}$ , allora posto  $G := \mathcal{F}(g)$  si ha che  $G(\omega) = F(\omega/a)/|a|$  per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$ ;
4. se  $f$  è derivabile in  $\mathbb{R}$  e  $f'$  è continua a tratti e sommabile, allora per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$  si ha

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega) \quad (1.4)$$

5. se la funzione  $g : x \in \mathbb{R} \rightarrow g(x) := xf(x) \in \mathbb{R}$  è sommabile, allora

$$F'(\omega) = \mathcal{F}(-ig)(\omega) \quad (1.5)$$

*Dimostrazione del Teorema 1.10.* La dimostrazione dei punti 1–3 è molto semplice e viene lasciata per esercizio al lettore. Punto 4: integrando per parti si ha

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f'(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-i\omega x} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega e^{-i\omega x} f(x) dx \right\} = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega)$$

ove si è usato che le ipotesi di regolarità e di sommabilità su  $f$  implicano che il primo termine tra parentesi graffe si annulla all'infinito.

Punto 5: sia  $\omega \in \mathbb{R}$  e  $\{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$  una successione di numeri reali convergente a  $\omega$ . Si vuole calcolare il limite per  $n$  che tende all'infinito del seguente rapporto incrementale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\omega_n) - F(\omega)}{\omega_n - \omega} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{e^{-i\omega_n x} - e^{-i\omega x}}{\omega_n - \omega} dx \quad (1.6)$$

Per passare al limite sotto il segno di integrale si vuole usare il Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata; si deve quindi stimare dall'alto la funzione integranda:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-i\omega_n x} - e^{-i\omega x}}{\omega_n - \omega} &= e^{-i\omega x} \frac{e^{-i(\omega_n - \omega)x} - 1}{\omega_n - \omega} = \frac{e^{-i\omega x}}{\omega_n - \omega} \{1 - ix(\omega_n - \omega) + o[(\omega_n - \omega)^2 x^2] - 1\} \\ &= e^{-i\omega x} \{-ix + o[(\omega_n - \omega)x^2]\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

ove si è sviluppato in serie di potenze la funzione esponenziale complessa e si è arrestato lo sviluppo al secondo ordine. Usando, ora, la disuguaglianza triangolare si ha che

$$\left| \frac{e^{-i\omega_n x} - e^{-i\omega x}}{\omega_n - \omega} \right| = \left| e^{-i\omega x} \{-ix + o[(\omega_n - \omega)x^2]\} \right| \leq |x| + |o[(\omega_n - \omega)x^2]| \leq 2|x|$$

ove nell'ultimo passaggio si è supposto  $n$  abbastanza grande. In forza dell'ipotesi di sommabilità della funzione  $g : x \in \mathbb{R} \rightarrow g(x) := xf(x) \in \mathbb{R}$  e del Teorema sulla convergenza dominata si ha che si può passare al limite sotto il segno di integrale e scrivere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\omega_n) - F(\omega)}{\omega_n - \omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) \frac{e^{-i\omega_n x} - e^{-i\omega x}}{\omega_n - \omega} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} (-ix) dx$$

ove nell'ultimo passaggio si è usata di nuovo l'uguaglianza (1.7).

Teorema 1.10  $\square$

**Esempio 1.11.** Si considera la funzione  $f(x) = \exp\{-\lambda|x|\}$  con  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  di cui si è calcolato la trasformata di Fourier nell'Esempio 1.7. La derivata prima di  $f$  è continua a tratti e vale:

$$f'(x) = \begin{cases} -\lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ \lambda e^{\lambda x} & x < 0 \end{cases}$$

Allora usando il Punto 4 del Teorema 1.10 e il risultato dell'Esempio 1.7 si ha che la trasformata di Fourier della derivata  $f'$  è data da

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}$$

per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$ .

**Esempio 1.12.** Si usano i Punti 4 e 5 del Teorema 1.10 per calcolare la trasformata di Fourier della gaussiana  $f(x) = \exp\{-x^2/a\}$ , con  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , che verrà calcolata in modo diretto nel Paragrafo 1.3 seguente. In primo luogo si osserva che  $f'(x) = -(2x/a)\exp\{-x^2/a\} = -(2x/a)f(x)$  e che usando i Punti 4 e 5 del Teorema 1.10 si ha

$$i\omega\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{F}(f')(\omega) = -\frac{2}{a}\mathcal{F}(xf)(\omega) = -\frac{2i}{a}\mathcal{F}(-ixf)(\omega) = -\frac{2i}{a} \frac{d}{d\omega}\mathcal{F}(f)(\omega)$$

Allora detta  $F$  la trasformata di Fourier  $\mathcal{F}(f)$  della funzione  $f$  si ha che  $F$  deve soddisfare alla seguente equazione differenziale ordinaria del primo ordine:

$$F' = -\frac{a\omega}{2} F$$

Tale equazione viene integrata facilmente per separazione delle variabili, infatti

$$F' = -\frac{a\omega}{2} F \Leftrightarrow \frac{dF}{F} = -\frac{a}{2}\omega d\omega \Leftrightarrow \log|F(\omega)| = -\frac{a}{4}\omega^2 + \text{cost} \Leftrightarrow F(\omega) = C e^{-a\omega^2/4}$$

ove  $C$  è una costante reale arbitraria. Per determinare  $C$  si deve fissare una condizione iniziale e ciò può essere fatto calcolando la trasformata di Fourier di  $f$  in  $\omega = 0$ , infatti:

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i \cdot 0 \cdot x} e^{-x^2/a} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/a} dx = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{a}{2}}$$

Allora imponendo la condizione iniziale appena determinata all'integrale generale  $F(\omega) = C \exp\{-a\omega^2/2\}$  si ottiene

$$F(0) = \sqrt{\frac{a}{2}} \implies C e^{-a \cdot 0^2/4} = \sqrt{\frac{a}{2}} \implies C = \sqrt{\frac{a}{2}}$$

E quindi si trova la trasformata di Fourier

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{a}{2}} e^{-a\omega^2/4}$$

**Esercizio 1.2.2.** Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione  $f(x) = 1 - x^2$  se  $|x| \leq 1$  e  $f(x) = 0$  se  $|x| > 1$ .

Soluzione 1.2.2:  $F(\omega) = \sqrt{8/(\pi\omega^4)}(\sin \omega/\omega - \cos \omega)$ .

**Esercizio 1.2.3.** Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione  $f(x) = b(a^2 - x^2)$  se  $|x| \leq a$  e  $f(x) = 0$  altrimenti, con  $a > 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ .

Soluzione 1.2.3:  $F(\omega) = 4b(\sin \omega a - \omega a \cos \omega a)/\omega^3 \sqrt{2\pi}$ .

**Esercizio 1.2.4.** Si calcolino le trasformate di Fourier  $F$ ,  $G$  e  $H$  delle funzioni  $f(x) = e^{-x^2/a}$  con  $a > 0$ ,  $g(x) = 4xe^{-x^2}$  e  $h(x) = e^{-4x^2-4x-1}$ .

Soluzione 1.2.4:  $F(\omega) = \sqrt{a/2}e^{-a\omega^2/4}$ ,  $G(\omega) = -\sqrt{2}i\omega e^{-\omega^2/4}$  e  $H(\omega) = (1/2\sqrt{2})e^{-\omega^2/16+i\omega/2}$ .

### 1.3. Trasformata di Fourier della gaussiana

La trasformata di Fourier della gaussiana è un problema molto interessante non solo per le sue innumerevoli applicazioni concrete, ma anche per la tecnica che si usa per effettuare il calcolo. Sia  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , si considera la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(x) = e^{-x^2/a}$ , per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ; si dimostra che la trasformata di Fourier

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x - x^2/a} dx \quad (1.8)$$

della funzione  $f$  è la gaussiana

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{a}{2}} e^{-a\omega^2/4} \quad (1.9)$$

per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$ . Si osserva che la funzione  $F$  è continua, limitata e infinitesima all'infinito, come previsto dal Teorema 1.5, e che  $f$  è reale e pari, come previsto dal Teorema 1.6. Si osserva, infine, che la funzione  $f$  ha larghezza  $a$ , mentre la sua trasformata ha larghezza dell'ordine di  $1/a$ ; anche in questo caso si nota la legge generale cui s'è fatto cenno nell'Esempio 1.3.

Per il calcolo dell'integrale (1.8) si cerca di ricondursi all'integrale della gaussiana sull'asse reale; si osserva che

$$i\omega x + \frac{x^2}{a} = \left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2 + i\omega x + \left(\frac{i\omega\sqrt{a}}{2}\right)^2 - \left(\frac{i\omega\sqrt{a}}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{i\omega\sqrt{a}}{2}\right)^2 + \frac{a\omega^2}{4}$$

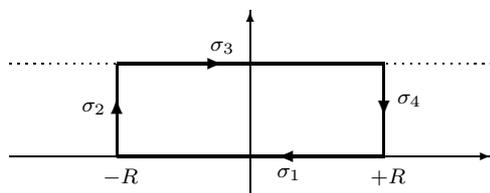
Allora la trasformata integrale (1.8) può essere scritta nella forma seguente

$$F(\omega) = \frac{e^{-a\omega^2/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x/\sqrt{a} + i\omega\sqrt{a}/2)^2} dx = e^{-a\omega^2/4} \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y + i\omega\sqrt{a}/2)^2} dy$$

ove nell'ultimo passaggio è stata eseguita la sostituzione  $y = x/\sqrt{a}$ . Il risultato (1.9) segue immediatamente dal fatto che per ogni  $b \in \mathbb{R}$  si ha

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+ib)^2} dy = \sqrt{\pi} \quad (1.10)$$

Al fine di calcolare l'integrale  $I$  si considera la funzione complessa ausiliaria  $g(z) = e^{-z^2}$  e se ne calcola l'integrale lungo il circuito  $\sigma$  ottenuto come unione dei quattro segmenti del piano complesso:



$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= -t & t \in [-R, +R] \\ \sigma_2(t) &= -R + it & t \in [0, b] \\ \sigma_3(t) &= t + ib & t \in [-R, +R] \\ \sigma_4(t) &= R + i(b-t) & t \in [0, b] \end{aligned}$$

ove  $R$  è un numero reale positivo e si è supposto  $b > 0$ ; nel caso  $b < 0$  si procede in modo analogo. In forza dell'olomorfia di  $g$  su tutto  $\mathbb{C}$  e del Teorema integrale di Cauchy si ha che

$$\int_{\sigma} g(z) dz = 0 \implies - \int_{-R}^R e^{-t^2} dt + i \int_0^b e^{-(-R+it)^2} dt + \int_{-R}^R e^{-(t+ib)^2} dt - i \int_0^b e^{-(-R+i(b-t))^2} dt = 0$$

Passando al limite per  $R$  che tende all'infinito si ha

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt - i \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[ \int_0^b e^{-(-R+it)^2} dt - \int_0^b e^{-(-R+i(b-t))^2} dt \right]$$

La (1.10) segue dal fatto che il primo integrale è uguale a  $\sqrt{\pi}$ , si veda l'Appendice B, e che gli altri due integrali tendono a zero nel limite  $R \rightarrow \infty$ . Si studia in dettaglio il primo dei due integrali tra parentesi quadre; per il secondo si procede in modo analogo:

$$\left| \int_0^b e^{-(-R+it)^2} dt \right| \leq \int_0^b \left| e^{-(R^2-t^2-2iRt)} \right| dt = \int_0^b e^{-R^2+t^2} dt = C(b) e^{-R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

ove  $C(b)$  è un reale positivo dipendente da  $b$ .

#### 1.4. Trasformata di Fourier di una funzione razionale

Si consideri una funzione razionale  $R(x)$  di variabile reale  $x \in \mathbb{R}$ ; si supponga che il denominatore di  $R(x)$  non ha zeri sull'asse reale e che la funzione si annulla abbastanza rapidamente all'infinito, più precisamente

$$R(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{x^k}$$

con  $k \geq 2$ . Si vuole calcolare la trasformata integrale

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{-i\omega x} dx \quad (1.11)$$

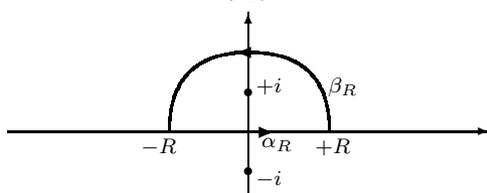
con  $\omega \in \mathbb{R}$ . Si osserva che l'integrale è convergente per ogni  $\omega$  e che il risultato può essere usato per calcolare integrali nella forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos \omega x dx = \sqrt{2\pi} \operatorname{Re} F(\omega) \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin \omega x dx = -\sqrt{2\pi} \operatorname{Im} F(\omega)$$

Si mostra come si possa impostare il calcolo nel caso particolare della funzione lorentziana  $R(x) = 1/(1+x^2)$ ; ovvero si vuole calcolare la trasformata di Fourier

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\omega x} dx$$

In primo luogo si considera la funzione ausiliaria  $g(z) = e^{-i\omega z}/(1+z^2)$ , con  $z \in \mathbb{C}$ , e si osserva che gli zeri del denominatore  $z_1 = -i$  e  $z_2 = +i$  non cadono sull'asse reale. Si suppone  $\omega < 0$  e si considera il circuito di integrazione  $\sigma_R$  ottenuto come unione del segmento  $\alpha_R$  e della semicirconferenza  $\beta_R$ :



$$\alpha_R(t) = t \quad t \in [-R, +R]$$

$$\beta_R(t) = R e^{it} \quad t \in [0, \pi]$$

Osservato che  $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$  e che per  $R$  grande il solo polo  $+i$  cade all'interno del circuito di integrazione si ha che

$$\int_{\sigma_R} \frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2} dz = \frac{1}{2i} \left[ \int_{\sigma_R} \frac{e^{-i\omega z}}{z-i} dz - \int_{\sigma_R} \frac{e^{-i\omega z}}{z+i} dz \right] = \pi e^{-i\omega(+i)} + 0 = \pi e^{\omega} \quad (1.12)$$

$f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$	$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$
$e^{-a x }$	$\sqrt{2/\pi} a / (a^2 + \omega^2)$
$e^{-ax}$ per $x > 0$ , 0 per $x = 0$ , $-e^{ax}$ per $x < 0$	$-i\sqrt{2/\pi} \omega / (a^2 + \omega^2)$
$\sqrt{2/\pi} a / [a^2 + (x-b)^2]$	$e^{ib\omega - a \omega }$
$\sqrt{1/(2\pi)} a \{1/[a^2 + (x-b)^2] + 1/[a^2 + (x+b)^2]\}$	$\cos(b\omega)e^{-a \omega }$
$i\sqrt{1/(2\pi)} a \{1/[a^2 + (x+b)^2] - 1/[a^2 + (x-b)^2]\}$	$\sin(b\omega)e^{-a \omega }$
$\sqrt{1/(2\pi)} / [a + i(x-b)]$	$e^{ib\omega - a\omega}$ per $\omega > 0$ , 0 per $\omega < 0$
1 per $a-b < x < a+b$ , 0 altrove	$\sqrt{2/\pi} \sin(b\omega)e^{-ia\omega} / \omega$
1 per $a-b <  x  < a+b$ , 0 altrove	$2\sqrt{2/\pi} \sin(b\omega) \cos(a\omega) / \omega$
$e^{ibx}$ per $ x  < a$ , 0 altrove	$\sqrt{2/\pi} \sin[a(\omega-b)] / (\omega-b)$
$\cos(bx)$ per $ x  < a$ , 0 altrove	$\sqrt{2/\pi} \{ \sin[a(\omega-b)] / (\omega-b) + \sin[a(\omega+b)] / (\omega+b) \}$
$\sin(bx)$ per $ x  < a$ , 0 altrove	$i\sqrt{2/\pi} \{ \sin[a(\omega+b)] / (\omega+b) - \sin[a(\omega-b)] / (\omega-b) \}$

Tabella 1.1. Tavola delle trasformate di Fourier.

ove si è usato la formula integrale di Cauchy per il primo integrale e il Teorema integrale di Cauchy per il secondo. Si osserva, ora, che scrivendo esplicitamente l'integrale di  $g$  lungo il segmento reale  $\alpha_R$  si ottiene proprio la trasformata di Fourier della lorentziana, più precisamente sostituendo nella (1.12) le espressioni esplicite delle curve si ha:

$$\pi e^\omega = \int_{-R}^R \frac{e^{-i\omega t}}{1+t^2} dt + \int_{\beta_R} \frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2} dz \implies F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^\omega - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\beta_R} \frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2} dz$$

Per stimare l'integrale lungo la semicirconferenza si procede nel modo seguente; in primo luogo si stima dal basso il denominatore:

$$|1+z^2| = |(z-i)(z+i)| = |z-i||z+i| \geq ||z|-|-i|| |z|-|i|| = (R-1)^2$$

ove si è usato la disuguaglianza triangolare e il fatto che lungo la semicirconferenza  $\beta_R$  si ha  $|z|=R$ . Si stima ora dall'alto il numeratore dell'integrando: per  $t \in [0, \pi]$  si ha

$$|e^{-i\omega z}| = |e^{-i\omega R e^{it}}| = |e^{-i\omega R \cos t + \omega R \sin t}| = e^{\omega R \sin t} \leq 1$$

ove nell'ultimo passaggio si è usato che  $t \in [0, \pi]$  implica  $\sin t \geq 0$  e quindi  $\omega R \sin t \leq 0$ . In conclusione si ha che

$$\left| \int_{\beta_R} \frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2} dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{|e^{-i\omega R e^{it}}|}{|1+R^2 e^{2it}|} |Ri e^{it}| dt \leq \frac{R}{(R-1)^2} \int_0^\pi dt \leq \frac{\pi R}{(R-1)^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Si ha, quindi, che per  $\omega < 0$  la trasformata di Fourier della lorentziana è data da  $F(\omega) = \sqrt{\pi/2} e^\omega$ . Procedendo in modo analogo nel caso  $\omega > 0$  si conclude che

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|}$$

per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 1.4.2.** Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ; si calcolino le trasformate di Fourier  $F$ ,  $G$  e  $H$  delle funzioni  $f(x) = 1/(x^2 + \alpha^2)$ ,  $g(x) = 1/((x-x_0)^2 + \alpha^2)$  e  $h(x) = 1/(x^2 + \alpha^2)^2$ .

Soluzione 1.4.2:  $F(\omega) = \sqrt{\pi/2\alpha^2}e^{-\alpha|\omega|}$ ,  $G(\omega) = \sqrt{\pi/2\alpha^2}e^{-\alpha|\omega|}e^{-i\omega x_0}$  e  $H(\omega) = \sqrt{\pi/8\alpha^4}(|\omega| + 1/\alpha)e^{-\alpha|\omega|}$ .

**Esercizio 1.4.3.** Si calcolino le trasformate di Fourier in Tabella 1.1.

**Esercizio 1.4.4.** Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \lambda^2} e^{i\alpha x} dx$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Soluzione 1.4.4:  $\pi e^{-|\alpha|\lambda}/\lambda$ .

**Esercizio 1.4.5.** Si calcolino gli integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2ix - 2} e^{ix} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 4ix - 5)^3} e^{ix} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 8x^2 + 16} e^{-ix} dx$$

Soluzione 1.4.5:  $-(2\pi/e)\sin 1$ ,  $0$ ,  $3\pi e^{-2}/32$ .

**Esercizio 1.4.6.** Si calcolino gli integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} \sin x dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + b^2)^2} \cos ax dx$$

con  $a > 0$  e  $b \in \mathbb{C}$  tale che  $\operatorname{Re} b > 0$ .

Soluzione 1.4.6:  $\pi e^{-a}/(4a)$ ,  $\pi(ab + 1)e^{-ab}/(4b^3)$ .

**Esercizio 1.4.7.** Si calcolino gli integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^3} \cos x dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \cos x dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} \sin cx dx$$

con  $c > 0$  e  $a, b \in \mathbb{C}$  tali che  $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b > 0$ .

Soluzione 1.4.7:  $\pi(a^2 + 3a + 3)e^{-a}/16a^5$ ,  $\pi(e^{-a}/a - e^{-b}/b)/[2(b^2 - a^2)]$ ,  $\pi[2\sin(c/2) - \sin(c/2 - \pi/3)]e^{-c\sqrt{3}/2}/3$ .

### 1.5. Funzione caratteristica di una distribuzione di probabilità

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la densità di probabilità di una variabile  $X$  aleatoria assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue. La funzione di distribuzione deve essere tale che  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e inoltre deve valere la condizione di normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Preso  $n \in \mathbb{N}^*$ , se esiste l'integrale al secondo membro della (1.13), si definisce il *momento n-esimo*

$$\mathbb{E}[X^n] := \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx \tag{1.13}$$

In particolare per  $n = 1$  si ha l'*attesa* o *valor medio*  $\mathbb{E}[X]$  della variabile aleatoria  $X$ . Si definisce anche la *varianza*  $\sigma^2[X] := \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ .

Un utile strumento per il calcolo dei momenti è la *funzione caratteristica*  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$\Phi(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x) dx$$

per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$ . Si osserva che se si denota con  $F$  la trasformata di Fourier di  $f$  allora  $\Phi(\omega) = \sqrt{2\pi}F(-\omega)$ . Nota la funzione caratteristica è possibile calcolare i momenti della distribuzione nel modo seguente

$$\Phi^{(n)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^n e^{i\omega x} f(x) dx \implies \Phi^{(n)}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} i^n x^n f(x) dx \implies \mathbb{E}[X^n] = \frac{1}{i^n} \Phi^{(n)}(0)$$

**Esempio 1.13.** Si considera la funzione di distribuzione gaussiana  $f(x) = e^{-x^2/a}/\sqrt{a\pi}$ , con  $a > 0$ , con la costante moltiplicativa scelta appositamente per assicurare la giusta normalizzazione della funzione di distribuzione  $f$ . Ricordando i risultati del Paragrafo 1.3 e detta  $F$  la trasformata di Fourier di  $f$  si ha che

$$\Phi(\omega) = \sqrt{2\pi}F(-\omega) = \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\sqrt{\frac{a}{2}}e^{-a\omega^2/4} = e^{-a\omega^2/4}$$

Calcolando le derivate si ha che

$$\Phi'(\omega) = -\frac{1}{2}\omega ae^{-a\omega^2/4} \quad \text{e} \quad \Phi''(\omega) = -\frac{1}{2}ae^{-a\omega^2/4}\left(1 - \frac{1}{2}a\omega^2\right)$$

In virtù delle relazioni precedenti si ha che

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{i}\Phi'(0) = 0, \quad \mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{i^2}\Phi''(0) = -\left(-\frac{1}{2}a\right) = \frac{a}{2} \quad \text{e} \quad \sigma^2[X] = \frac{a}{2}$$

**Esercizio 1.5.2.** Sia  $\lambda > 0$ , si consideri la distribuzione esponenziale  $f(x) = 0$  se  $x < 0$  e  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  se  $x \geq 0$ . Si verifichi che la distribuzione è normalizzata a uno, si calcoli la funzione di distribuzione  $\Phi(\omega) = \lambda/(\lambda - i\omega)$  e si usi tale risultato per dimostrare che  $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$  e  $\mathbb{E}[X^2] = 2/\lambda^2$ .

### 1.6. Reticoli di diffrazione

**Esercizio 1.6.2.** Un'onda elettromagnetica piana di lunghezza  $\lambda$  incide su una fenditura rettangolare di larghezza  $b$  e altezza infinita giacente in un piano parallelo al fronte d'onda incidente. Si determini lo spettro di diffrazione.

Soluzione 1.6.2:  $I(\vartheta) = I(0)[\sin(k \sin \vartheta b/2)/(k \sin \vartheta b/2)]^2$  con  $k = 2\pi/\lambda$ .

**Esercizio 1.6.3.** Un'onda elettromagnetica piana di lunghezza  $\lambda$  incide su un reticolo di diffrazione piano parallelo al fronte d'onda incidente costituito da due fenditure rettangolari di larghezza  $b$ , altezza infinita e poste a distanza  $a \gg b$ . Si determini lo spettro di diffrazione.

Soluzione 1.6.3:  $I(\vartheta) = I(0)[\sin(k \sin \vartheta b/2)/(k \sin \vartheta b/2)]^2 \cos^2(k \sin \vartheta a/2)$  con  $k = 2\pi/\lambda$ .

**Esercizio 1.6.4.** Un'onda elettromagnetica piana di lunghezza  $\lambda$  incide su un reticolo di diffrazione piano parallelo al fronte d'onda incidente costituito da  $N$  fenditure rettangolari di larghezza  $b$ , altezza infinita e poste a distanza  $a \gg b$  l'una dall'altra. Si determini lo spettro di diffrazione.

Soluzione 1.6.4:  $I(\vartheta) = I(0)[\sin(k \sin \vartheta b/2)/(k \sin \vartheta b/2)]^2 [\sin(k \sin \vartheta Na/2)/\sin(k \sin \vartheta a/2)]^2$  e  $k = 2\pi/\lambda$ .

## 2. Serie e integrale di Fourier

Questo capitolo è dedicato agli esercizi sullo sviluppo in serie di Fourier, di una funzione definita sull'intervallo  $[-\pi, \pi]$ , e in integrale di Fourier, di una funzione continua a tratti e assolutamente integrabile su tutto l'asse reale.

### 2.2. Serie di Fourier

Sia  $L > 0$  e  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione sommabile su  $[-L, L]$ ; si dice *coefficiente di Fourier  $n$ -esimo* della funzione  $f$  il numero complesso

$$c_n := \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^{+L} f(x) e^{-in\pi x/L} dx \quad (2.2)$$

Si dice *serie di Fourier* della funzione  $f$  la seguente serie bilatera:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2L}} e^{inx\pi/L} = \frac{c_0}{\sqrt{2L}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2L}} e^{inx\pi/L} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{\sqrt{2L}} e^{-inx\pi/L} \quad (2.3)$$

**Teorema 2.2** (convergenza puntuale della serie di Fourier) Sia  $L > 0$  e  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua a tratti su  $[-L, L]$  e derivabile negli intervalli di continuità. La serie di Fourier associata alla funzione  $f$  è convergente puntualmente in  $[-L, L]$  e per ogni  $x_0 \in [-L, L]$  si ha

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2L}} e^{inx_0\pi/L} = \begin{cases} [f(-L) + f(L)]/2 & x_0 = \pm\pi \\ [\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)]/2 & x_0 \neq \pm\pi \end{cases} \quad (2.4)$$

Si osserva che se  $f$  è continua in  $x_0$  allora la somma della serie è proprio il valore  $f(x_0)$  che la funzione assume nel punto  $x_0$ .

*Alcune osservazioni:*

- in virtù del Teorema 2.2 sulla convergenza della serie di Fourier detta serie costituisce uno sviluppo della funzione di partenza  $f$ ; si scriverà, quindi,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2L}} e^{-in\pi x/L}$$

e si intenderà che la serie di Fourier ha somma  $f$  nel senso puntuale specificato nel teorema precedente.

- I risultati di convergenza enunciati nel teorema precedente valgono, ovviamente, anche per funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodiche di periodo  $2L$  e sufficientemente regolari ai sensi delle ipotesi del teorema.
- Nel seguito, per ragioni di semplicità e pigrizia, ci si limita a considerare il caso  $L = \pi$ ; ovviamente la generalizzazione dei risultati a intervalli generici è semplice.

È possibile usare la formula di Eulero per dedurre la cosiddetta forma *trigonometrica* o *reale* della serie di Fourier. Presa  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfacente le ipotesi del Teorema 2.2 e detti  $c_n$  i suoi coefficienti di Fourier si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} = \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \\ &= \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} [\cos nx + i \sin nx] + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{\sqrt{2\pi}} [\cos nx + i \sin nx] \\ &= \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n + c_{-n}}{\sqrt{2\pi}} \cos nx + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i(c_n - c_{-n})}{\sqrt{2\pi}} \sin nx \end{aligned}$$

Se si pone

$$a_0 := c_0, \quad a_n := (c_n + c_{-n}) \quad \text{e} \quad b_n := i(c_n - c_{-n}) \quad (2.5)$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}^*$ , si ha

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} \cos nx + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{\sqrt{2\pi}} \sin nx \quad (2.6)$$

Tale espressione è detta forma trigonometrica o reale della serie di Fourier. Il significato dell'aggettivo trigonometrico è palese; per convincersi che la serie merita l'appellativo di reale

si deve dimostrare che i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  sono numeri reali. Infatti

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \in \mathbb{R}$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \in \mathbb{R}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \in \mathbb{R}$$

**Esercizio 2.2.2.** Si sviluppi in serie di Fourier sull'intervallo  $I = [-\pi, \pi]$  la funzione  $f(x) = \sin x$ .

Soluzione 2.2.2: tutti i coefficienti di Fourier sono nulli tranne  $b_1 = \sqrt{\pi}$ .

**Esercizio 2.2.3.** Si sviluppi in serie di Fourier sull'intervallo  $I = [-\pi, \pi]$  la funzione  $f(x) = 2 \sin x \cos x$ .

Soluzione 2.2.3: tutti i coefficienti di Fourier sono nulli tranne  $b_2 = \sqrt{2\pi}$ .

**Esercizio 2.2.4.** Si sviluppi in serie di Fourier sull'intervallo  $I = [-\pi, \pi]$  la funzione  $f(x) = \text{sign } x$  e si dimostri che  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n / (2n + 1) = \pi/4$ .

Soluzione 2.2.4:  $a_n = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , perché la funzione è dispari,  $b_n = 4\sqrt{2/\pi}/n$  se  $n$  è dispari, zero altrimenti.

**Esercizio 2.2.5.** Si sviluppi in serie di Fourier sull'intervallo  $I = [-\pi, \pi]$  la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a + ax/\pi & -\pi \leq x \leq 0 \\ ax/\pi & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

con  $a \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$ .

**Esercizio 2.2.6.** Si sviluppi in serie di Fourier sull'intervallo  $I = [-\pi, \pi]$  la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x \leq 0 \\ a \sin x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

con  $a \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$ .

**Esercizio 2.2.7.** Si sviluppi in serie di Fourier sull'intervallo  $I = [-\pi, \pi]$  la funzione  $f(x) = |\sin x|$ .

**Esercizio 2.2.8.** Si sviluppi in serie di Fourier sull'intervallo  $I = [-\pi, \pi]$  la funzione  $f(x) = |x|$ . Si usi lo sviluppo in serie di Fourier per dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad .$$

Soluzione 2.2.8:  $b_n = 0$  con  $n \geq 1$ ,  $a_0 = \pi^2/\sqrt{2\pi}$ ,  $a_n = -4\sqrt{2/\pi}/n^2$  se  $n$  è dispari, zero altrimenti.

**Esercizio 2.2.9.** Si sviluppi in serie di Fourier sull'intervallo  $I = [-\pi, \pi]$  la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x \leq p \\ 1 & p < x \leq \pi \end{cases}$$

con  $p \in (-\pi, \pi)$ .

Soluzione 2.2.9:  $a_0 = -2p/\sqrt{2\pi}$ ,  $a_n = -(2\sqrt{2/\pi}/n) \sin np$  con  $n \geq 1$  e  $b_n = (2\sqrt{2/\pi}/n)(\cos np - (-1)^n)$  con  $n \geq 1$ .

**Esercizio 2.2.10.** Si sviluppi in serie di Fourier sull'intervallo  $I = [-\pi, \pi]$  la funzione  $f(x) = x^2$ . Si usi lo sviluppo in serie di Fourier per dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad .$$

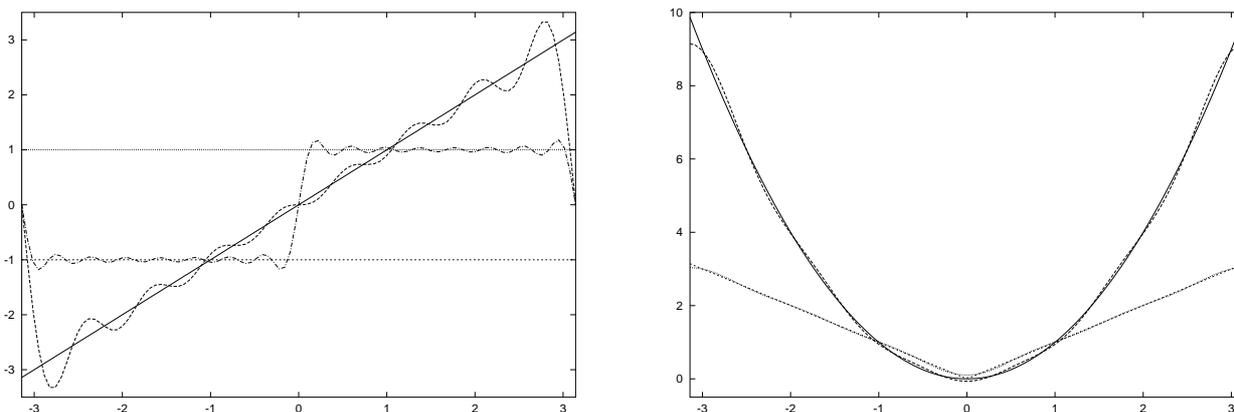


Fig. 2.1. A sinistra: sviluppi in serie di Fourier delle funzioni  $f(x) = x, \text{sign } x$  arrestati all'ottavo ordine. A destra: sviluppi in serie di Fourier delle funzioni  $f(x) = x^2, |x|$  arrestati, rispettivamente, al quinto e terzo ordine.

Soluzione 2.2.10:  $b_n = 0$  con  $n \geq 1$ ,  $a_0 = \pi^2\sqrt{2\pi}/3$ ,  $a_n = (4\sqrt{2\pi}/n^2) \cos n\pi$  con  $n \geq 1$ .

**Esercizio 2.2.11.** Si sviluppi in serie di Fourier sull'intervallo  $I = [-\pi, \pi]$  la funzione  $f(x) = x|x|$ .

**Esercizio 2.2.12.** Si sviluppi in serie di Fourier sull'intervallo  $I = [-\pi, \pi]$  la funzione  $f(x) = \sin(x/2)$ .

**Esercizio 2.2.13.** Si sviluppi in serie di Fourier sull'intervallo  $I = [-\pi, \pi]$  la funzione  $f(x) = x$ . Si usi lo sviluppo in serie di Fourier per dimostrare che

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} \quad e \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad .$$

Soluzione 2.2.13:  $b_n = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , perché la funzione è dispari, e inoltre  $a_n = 2\sqrt{2\pi}(-1)^{n+1}/n$ .

**Esercizio 2.2.14.** Si disegnino gli sviluppi in serie di Fourier delle quattro funzioni  $f(x) = x, |x|, x^2, \text{sign } x$  arrestando lo sviluppo ai primi 5 termini.

Soluzione 2.2.14: si veda Fig. 2.1.

**Esercizio 2.2.15.** Si sviluppi in serie di Fourier sull'intervallo  $I = [-\pi, \pi]$  la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} & -\pi \leq x < 0 \\ \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad .$$

Si usi lo sviluppo in serie per dimostrare che  $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k / (2k+1) = \pi/4$ .

Soluzione 2.2.15:  $b_n = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , perché la funzione è dispari,  $a_n = -\sqrt{2/\pi}/n$  se  $n$  è pari,  $a_n = 3\sqrt{2/\pi}/n$  se  $n$  è dispari.

**Esercizio 2.2.16.** Si sviluppi in serie di Fourier sull'intervallo  $I = [-\pi, \pi]$  la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \frac{3}{4\pi}x - \frac{1}{4} & -\pi \leq x < 0 \\ \frac{3}{4\pi}x + \frac{1}{4} & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad .$$

Si usi lo sviluppo in serie per dimostrare che  $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k / (2k+1) = \pi/4$ .

Soluzione 2.2.16:  $b_n = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , perché la funzione è dispari,  $a_n = -3/(n\sqrt{2\pi})$  se  $n$  è pari,  $a_n = 5/(n\sqrt{2\pi})$  se  $n$  è dispari.

**Esercizio 2.2.17.** Si sviluppi in serie di Fourier sull'intervallo  $I = [-\pi, \pi]$  la funzione

$$f(x) := \begin{cases} -\frac{x}{\pi} - 1 & -\pi \leq x < 0 \\ -\frac{x}{\pi} + 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad .$$

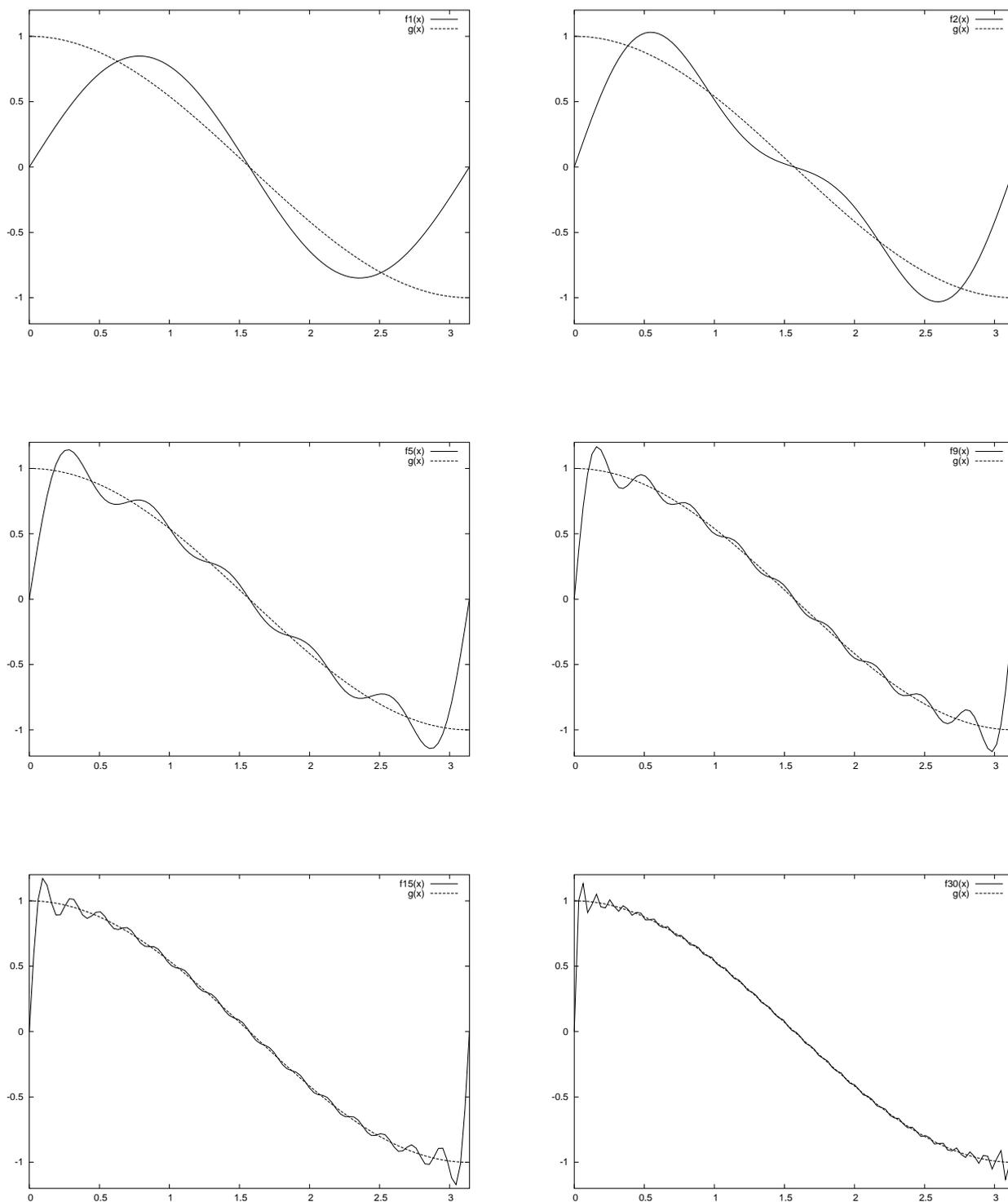


Fig. 2.2. Con riferimento all'Esercizio 2.3.5. Sviluppo in serie di Fourier di soli seni della funzione  $\cos x$  sull'intervallo  $[0, \pi]$ . Dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra vengono riportati i grafici della funzione coseno e della somma parziale  $n$ -esima con  $n = 1, 2, 5, 9, 15, 30$ .

Si usi lo sviluppo in serie per dimostrare che  $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k / (2k+1) = \pi/4$ .

Soluzione 2.2.17:  $b_n=0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , perché la funzione è dispari,  $a_n = 2\sqrt{2/\pi}/n$  se  $n$  è dispari.

### 2.3. Serie di Fourier di soli seni e di soli coseni

**Esercizio 2.3.2.** Si sviluppi in serie di Fourier di soli seni e di soli coseni la funzione  $f(x) = e^{\alpha x}$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $x \in [0, \pi]$ . Si studi la convergenza puntuale in 0 e in  $\pi$ .

Soluzione 2.3.2:  $a'_0 = (e^{\alpha\pi} - 1)\sqrt{2/\pi}/\alpha$ ,  $a'_n = 2\sqrt{2/\pi}[(-1)^n e^{\alpha\pi} - 1]\alpha/(\alpha^2 + n^2)$  per ogni  $n \geq 1$ ,  $b'_n = -2\sqrt{2/\pi}[(-1)^n e^{\alpha\pi} - 1]n/(\alpha^2 + n^2)$  per ogni  $n \geq 1$ .

**Esercizio 2.3.3.** Si sviluppi in serie di Fourier di soli seni e di soli coseni la funzione  $f(x) = x$  con  $x \in [0, \pi]$ .

Soluzione 2.3.3:  $a'_0 = \pi\sqrt{2\pi}/2$ ,  $a'_n = 2\sqrt{2/\pi}[(-1)^n - 1]/n^2$ ,  $b'_n = 2\sqrt{2\pi}(-1)^{n+1}/n$ .

**Esercizio 2.3.4.** Si sviluppi in serie di Fourier di soli seni e di soli coseni la funzione  $f(x) = x^2$  con  $x \in [0, \pi]$ .

Soluzione 2.3.4:  $a'_0 = \pi^2\sqrt{2\pi}/3$ ,  $a'_n = 4\sqrt{2/\pi}(-1)^n/n^2$ ,  $b'_n = 2\sqrt{2/\pi}\{\pi^2(-1)^{n+1} + 2[(-1)^n - 1]/n^2\}/n$ .

**Esercizio 2.3.5.** Si sviluppi in serie di Fourier di soli seni e di soli coseni la funzione  $f(x) = \cos x$  con  $x \in [0, \pi]$ .

Soluzione 2.3.5:  $a'_0 = 0$ ,  $a'_1 = 2\sqrt{\pi/2}$ ,  $a'_n = 0$  per ogni  $n \geq 2$ ,  $b'_n = 2\sqrt{2/\pi}n[1 - (-1)^{n+1}]/(n^2 - 1)$ , si vedano i grafici riportati in Fig. 2.2.

### 2.4. Integrale di Fourier e sue applicazioni

Si ricorda la definizione (1.2) di Trasformata di Fourier. Vale il seguente importante teorema sull'integrale di Fourier:

**Teorema 2.3** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua a tratti, assolutamente integrabile e tale che

$$f(x_0) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right]$$

nei punti di discontinuità. Allora

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^{+M} F(\omega) e^{i\omega x} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} \quad . \quad (2.7)$$

**Esercizio 2.4.2.** Si usino i risultati degli Esempi 1.3 e 1.7 per dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega x}{1 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$$

## 3. Richiami sulle equazioni differenziali ordinarie

Un'equazione differenziale ordinaria di ordine  $n \in \mathbb{N}^*$  nella funzione incognita  $x : t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$  è un'equazione nella forma

$$x^{(n)}(t) = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}) \quad (3.2)$$

ove  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione assegnata. Il problema consiste nel determinare una funzione  $x = x(t)$  derivabile  $n$  volte e soddisfacente le (3.2). Una siffatta funzione è detta *integrale* o *soluzione* dell'equazione (3.2). Si dice *integrale generale* della (3.2) una funzione  $x : (c_1, \dots, c_n; t) \in \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow x = x(c_1, \dots, c_n; t) \in \mathbb{R}$  tale che per ogni soluzione  $\bar{x} = \bar{x}(t)$  dell'equazione (3.2) esiste una  $n$ -upla reale  $(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n) \in \mathbb{R}^n$  tale che  $\bar{x}(t) = x(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n; t)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 3.2** (di Cauchy) *Si consideri l'equazione differenziale (3.2) con la funzione  $f$  lipschitziana rispetto a  $x, \dots, x^{(n-1)}$  su tutto  $\mathbb{R}^n$ , ovvero esiste una costante reale e positiva  $M$  tale che*

$$|f(t, x_1, \dots, x_1^{(n-1)}) - f(t, x_2, \dots, x_2^{(n-1)})| \leq M[|x_1 - x_2| + \dots + |x_1^{(n-1)} - x_2^{(n-1)}|] \quad (3.3)$$

per ogni  $(t, x_1, \dots, x_1^{(n-1)}), (t, x_2, \dots, x_2^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Allora comunque si prendano i reali  $t_0, x_0, \dots, x_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$  esiste un'unica soluzione di (3.2) che soddisfa alle condizioni di Cauchy

$$x(t_0) = x_0, \quad x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \quad (3.4)$$

Si osserva la fondamentale importanza di tale teorema in meccanica, infatti esso assicura l'unicità del moto una volta fissate la velocità e la posizione iniziale di un elemento.

**Esempio 3.3.** Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine  $\dot{x} = t$ ; tale equazione è nella forma (3.2) con  $n = 1$  e  $f(t, x) = t$ . È immediato osservare che l'insieme di tutte le soluzioni di tale equazione è l'insieme di tutte le primitive della funzione  $f(t) = t$ . Pertanto il suo integrale generale è  $x(c; t) = t^2/2 + c$ . Si può ora determinare l'unica soluzione che soddisfa alla condizione di Cauchy  $x(1) = 3$ ; si ha

$$x(1) = 3 \implies \frac{1}{2} + c = 3 \implies c = \frac{5}{2} \implies x(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{2}$$

### 3.2. Equazioni lineari a coefficienti costanti.

Una famiglia di equazioni differenziali ordinarie molto interessante è quella costituita dalle equazioni differenziali ordinarie lineari, ovvero dalle equazioni della forma (3.2) in cui la funzione  $f$  è un polinomio del primo ordine nelle variabili  $x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ . Più precisamente si chiamano equazioni differenziali ordinarie lineari di ordine  $n$  equazioni nella forma

$$d_n(t)x^{(n)} + d_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + d_1(t)x^{(1)} + d_0(t)x = f(t) \quad (3.5)$$

ove  $d_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni assegnate sufficientemente regolari; la funzione  $f$  è detta *termine noto*. Un'equazione nella forma (3.5) è detta *completa* se la funzione  $f$  non è identicamente nulla. Si chiama *equazione omogenea* associata alla (3.5) l'equazione

$$d_n(t)x^{(n)} + d_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + d_1(t)x^{(1)} + d_0(t)x = 0 \quad (3.6)$$

Sia  $x_{\text{om}}(c_1, \dots, c_n; t)$  l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea (3.6) e sia  $\bar{x}(t)$  una soluzione di (3.5), allora la funzione  $x(c_1, \dots, c_n; t) := x_{\text{om}}(c_1, \dots, c_n; t) + \bar{x}(t)$  è l'integrale generale dell'equazione completa (3.5). Tale risultato si dimostra facilmente: sia  $x(t)$  è una generica soluzione di (3.5), si ha che  $x(t) - \bar{x}(t)$  è soluzione di (3.6), infatti

$$d_n(t)(x - \bar{x})^{(n)} + d_{n-1}(t)(x - \bar{x})^{(n-1)} + \dots + d_1(t)(x - \bar{x})^{(1)} + d_0(t)(x - \bar{x}) = \beta(x) - \beta(x) = 0$$

In virtù di tale risultato la determinazione dell'integrale generale della (3.5) si spezza in due problemi: determinazione dell'integrale generale di (3.6) e determinazione di una soluzione di (3.5).

Il caso del primo ordine: se  $n = 1$  l'equazione (3.5) e l'omogenea associata si riducono alla forma seguente:

$$\frac{dx}{dt} + \alpha(t)x = \beta(t) \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} = -\alpha(t)x$$

con  $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  assegnate. L'integrale generale dell'omogenea associata può essere determinato per separazione della variabili; infatti si ha che

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha(t)x \implies \frac{dx}{x} = -\alpha(t) dt \implies \log |x(t)| = -\int_0^t \alpha(t') dt' + \text{cost} \implies x(t) = c e^{-\int_0^t \alpha(t') dt'}$$

ove  $c$  è una costante reale arbitraria. L'integrale particolare della completa, invece, può essere determinato con il metodo di *variazione delle costanti arbitrarie*. Si pone, infatti,

$$\bar{x}(t) = \gamma(t) e^{-\int_0^t \alpha(t') dt'}$$

e si richiede che  $\bar{x}(t)$  sia soluzione dell'equazione completa. Si ha

$$\dot{\gamma}(t) e^{-\int_0^t \alpha(t') dt'} - \gamma(t) e^{-\int_0^t \alpha(t') dt'} \alpha(t) + \alpha(t) \gamma(t) e^{-\int_0^t \alpha(t') dt'} = \beta(t) \implies \dot{\gamma}(t) = \beta(t) e^{+\int_0^t \alpha(t') dt'}$$

e quindi la funzione  $\gamma(t)$  può essere determinata con una sola integrazione.

**Esempio 3.4.** Si risolva l'equazione differenziale  $x' = tx + t^3$ . Si integra dapprima l'omogenea associata

$$\frac{dx}{dt} = tx \implies \frac{dx}{x} = t dt \implies \log |x(t)| = \frac{1}{2} t^2 + \text{cost} \implies x(t) = c e^{t^2/2}$$

Una volta ottenuto l'integrale generale dell'omogenea si determina una soluzione particolare della completa; si cerca una soluzione nella forma  $\bar{x}(t) = \gamma(t) \exp\{-t^2/2\}$ . Sostituendo nella completa si ottiene

$$\dot{\gamma} = t^3 e^{-t^2/2} \implies \gamma(t) = -t^2 e^{-t^2/2} - 2e^{-t^2/2}$$

Si può, infine, scrivere l'integrale generale della completa:

$$x(t) = c e^{t^2/2} + \gamma(t) e^{-t^2/2} = c e^{t^2/2} - t^2 - 2$$

Si considera, ora, il caso di equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti di ordine anche superiore al primo. Non si fanno dimostrazioni ci si limita a fornire una ricetta. Per determinare l'integrale generale della (3.6) si considera la cosiddetta equazione algebrica *caratteristica* a coefficienti reali:

$$d_n \lambda^n + d_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + d_1 \lambda + d_0 = 0 \tag{3.7}$$

ove i coefficienti  $d_i$ , con  $i = 0, 1, \dots, n$ , sono numeri reali assegnati. L'equazione caratteristica ha  $n$  radici, alcune reale e altre a coppie complesse coniugate. A ciascuna di tali radici viene associato un integrale della (3.6); più precisamente a una radice reale  $\lambda$  di molteplicità  $r$  vengono associati gli  $r$  integrali

$$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{r-1} e^{\lambda t}$$

mentre a una coppia di soluzioni complesse coniugate  $\lambda_{\pm} = a \pm ib$  di molteplicità  $r$  vengono associati i  $2r$  integrali:

$$e^{at} \cos bt, t e^{at} \cos bt, \dots, t^{r-1} e^{at} \cos bt, e^{at} \sin bt, t e^{at} \sin bt, \dots, t^{r-1} e^{at} \sin bt$$

Denotati con  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  gli  $n$  integrali indipendenti così ottenuti si scrive l'integrale generale dell'omogenea (3.6)

$$x_{\text{om}}(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t)$$

ove  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  sono  $n$  costanti reali arbitrarie.

Per la determinazione dell'integrale particolare della completa, invece, si procede con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie. Si scrive la soluzione particolare nella forma  $\bar{x}(t) = \gamma_1(t)x_1(t) + \dots + \gamma_n(t)x_n(t)$  e sostituendo in (3.5) si ottiene che le funzioni arbitrarie  $\gamma_i$  devono soddisfare al seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1(t)x_1(t) + \dots + \dot{\gamma}_n(t)x_n(t) = 0 \\ \dot{\gamma}_1(t)x_1^{(1)}(t) + \dots + \dot{\gamma}_n(t)x_n^{(1)}(t) = 0 \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + \dots + \dot{\gamma}_n(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}$$

Un metodo più rapido per la determinazione dell'integrale particolare consiste nel provare una soluzione "ad hoc" per la particolare forma della funzione  $f(t)$ . Per esempio se  $f(t)$  è un polinomio si cercherà  $\bar{x}(t)$  nella forma di polinomio di grado opportuno. Un caso interessante è il termine noto  $f(t)$  funzione trigonometrica: se  $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$  e  $\omega$  non è la parte immaginaria di una soluzione dell'equazione caratteristica, allora la soluzione particolare andrà cercata come  $\bar{x}(t) = A \sin(\omega t + \psi)$ ; se, invece,  $\omega$  è la parte immaginaria di una soluzione dell'equazione caratteristica, allora la soluzione particolare andrà cercata come  $\bar{x}(t) = At \sin(\omega t + \psi)$ .

**Esempio 3.5.** Si determini l'integrale generale di  $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0$ . L'equazione caratteristica è  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$  che ha una radice  $\lambda = 1$ . Effettuando la scomposizione del polinomio l'equazione caratteristica si riscrive  $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$ . Si ottengono, pertanto, le tre radici  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  e  $\lambda_3 = 3$ . L'integrale generale cercato è  $x(t) = c_1 \exp\{t\} + c_2 \exp\{2t\} + c_3 \exp\{3t\}$ .

**Esempio 3.6.** Si determini l'integrale generale di  $x''' - x = 0$ . L'equazione caratteristica è  $\lambda^3 - 1 = 0$  che ha una radice  $\lambda = 1$ . Effettuando la scomposizione del polinomio l'equazione caratteristica si riscrive  $(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$ . Si ottengono, pertanto, le tre radici  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = (-1 + i\sqrt{3})/2$  e  $\lambda_3 = (-1 - i\sqrt{3})/2$ . L'integrale generale cercato è

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

**Esempio 3.7.** Si determini l'integrale generale di  $x'' - 3x' + 2x = t$ . L'equazione caratteristica è  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$  che ha radici  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 2$ . L'integrale generale dell'omogenea è  $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ . Per determinare l'integrale particolare della completa si cerca una soluzione polinomiale nella forma  $\bar{x}(t) = at + b$ . Sostituendo nell'equazione completa si ottiene  $-3a + 2at + 2b = t$  e per il principio di identità dei polinomi si ha  $a = 1/2$  e  $b = 3a/2 = 3/4$ . In conclusione l'integrale generale della completa è

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$$

**Esercizio 3.2.2.** Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:  $\dot{x} - tx = t^3$ ,  $t\dot{x} - x - t^3 = 0$ . Soluzione:  $x(t) = c \exp\{t^2/2\} - t^2 - 2$ ,  $x(t) = t^3/2 + cx$ .

**Esercizio 3.2.3.** Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:  $\dot{x} + x \cos t = \sin t \cos t$ ,  $\dot{x} - x \tan t = t^2$ .

Soluzione:  $x(t) = c \exp\{-\sin t\} + \sin t - 1$ ,  $x(t) = (t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t + c) / \cos t$ .

**Esercizio 3.2.4.** Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale:  $\dot{x} + tx - t = 0$ .

Soluzione:  $x(t) = c \exp\{-t^2/2\} + 1$ .

**Esercizio 3.2.5.** Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale:  $x'''' - 10x'' + 9x = 0$ .

Soluzione:  $x(t) = c_1 \exp\{t\} + c_2 \exp\{-t\} + c_3 \exp\{3t\} + c_4 \exp\{-3t\}$ .

**Esercizio 3.2.6.** Esercizio interessante per la presenza di soluzioni doppie dell'equazione caratteristica. Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:  $4x'''' - 4x'' - 7x' - 2x = 0$ ,  $x'''' - 6x''' + 13x'' - 12x' + 4x = 0$ .

Soluzione:  $x(t) = c_1 \exp\{-t/2\} + c_2 t \exp\{-t/2\} + c_3 \exp\{2t\}$ ,  $x(t) = c_1 \exp\{t\} + c_2 t \exp\{t\} + c_3 \exp\{2t\} + c_4 t \exp\{2t\}$ .

**Esercizio 3.2.7.** Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:  $9x'''' - 18x'' + x' - 2x = 0$ ,  $x'''' - 3x'' + 4x' - 2x = 0$ .

Soluzione:  $x(t) = c_1 \exp\{2t\} + c_2 \cos(t/3) + c_3 \sin(t/3)$ ,  $x(t) = c_1 \exp\{t\} + c_2 \exp\{t\} \cos t + c_3 \exp\{t\} \sin t$ .

**Esercizio 3.2.8.** Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:  $x'''' - 3x'' + 3x' - x = \exp\{2t\}$ ,  $6x'' - 5x' + x = t^2 + 1$ .

Soluzione:  $x(t) = c_1 \exp\{t\} + c_2 t \exp\{t\} + c_3 t^2 \exp\{t\} + \exp\{2t\}$ ,  $x(t) = c_1 \exp\{t/3\} + c_2 \exp\{t/2\} + t^2 + 10t + 39$ .

**Esercizio 3.2.9.** Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:  $x'''' - 8x = 2 \sin(2t) - \cos(2t)$ ,  $x'' + x = \sin t$ .

Soluzione:  $x(t) = c_1 \exp\{2t\} + c_2 \exp\{-t\} \cos(\sqrt{3}t) + c_3 \exp\{-t\} \sin(\sqrt{3}t) - (1/16) \sin(2t) + (3/16) \cos(2t)$ ,  $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - (1/2)t \cos t$ .

**Esercizio 3.2.10.** Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:  $x'' - x = \exp\{t\} \sin t$ ,  $x'''' + x' = 8 \exp\{4t\} [\sin(2t) + 68 \cos(2t)]$ .

Soluzione:  $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - (1/5)e^t (\sin t + 2 \cos t)$ ,  $x(t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t + 10e^{4t} [3 \sin(2t) + 56 \cos(2t)]$ .

### 3.3. Sistemi di equazioni differenziali lineari.

Sia  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $A$  una matrice reale  $n \times n$ . Si considera il sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$\dot{x} = Ax \quad \text{tale che} \quad x(0) = x^0 \quad (3.8)$$

con  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . La soluzione del sistema (3.8) è nella forma

$$x(t) = \exp\{At\}x^0 \quad (3.9)$$

Se  $B(t)$  è un vettore continuo di  $\mathbb{R}^2$ , allora l'unica soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari non omogenee del primo ordine  $\dot{x} = Ax + B$ , con condizione iniziale  $x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2$ , è nella forma

$$x(t) = e^{At} \left[ x^0 + \int_0^t ds e^{-As} B(s) \right] \quad (3.10)$$

Il problema è ridotto a determinare l'esponenziale  $\exp\{A\}$  della matrice  $A$ . Ingredienti e notazione:

- siano  $e := \{e_i, i = 1, \dots, n\}$  e  $f := \{f_i, i = 1, \dots, n\}$  due basi dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $P$  la matrice del cambiamento di base, ovvero  $f_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} e_j$ . Allora la matrice  $Q$  per il cambiamento di coordinate è  $Q = (P^T)^{-1}$ .
- Sia  $A_e$  la matrice associata ad un certo operatore lineare  $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  nella base  $e$ . Allora  $A_f = QA_e Q^{-1}$  è la matrice associata a  $T$  nella base  $f$ .
- Sia  $A := \{\lambda_i \delta_{i,j}, i, j = 1, \dots, n\}$  una matrice in forma diagonale. Allora

$$\exp\{A\} = \{\exp\{\lambda_i\} \delta_{i,j}, i, j = 1, \dots, n\}$$

– Sia  $A$  una matrice  $2 \times 2$ , siano  $a, b \in \mathbb{R}$ , allora:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \implies \exp\{A\} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos a \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

– Per la matrice identità si userà la notazione  $\mathbb{I} := \{\delta_{i,j}, i, j = 1, \dots, n\}$ .

– La base canonica dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  verrà denotata con  $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ . Ovvero,  $e_1 := (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $e_n := (0, 0, \dots, 1)$ .

**Esercizio 3.3.2.** Risolvere il sistema  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , con dato iniziale  $x^0 = (-1, \sqrt{2})$  e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione 3.3.2 (primo metodo): in primo luogo risolvo il problema agli autovalori per la matrice  $A$  scrivendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies (1 - \lambda)^2 + 8 = \lambda^2 - 2\lambda + 9 = 0$$

da cui si ottengono i due autovalori complessi coniugati

$$\lambda_1 = 1 + 2i\sqrt{2} \quad \lambda_2 = 1 - 2i\sqrt{2}$$

La matrice è semisemplice, quindi è diagonalizzabile nella base degli autovettori. Determino gli autovettori  $y_1$  e  $y_2$ .

$$\begin{cases} (1 - \lambda_1)y_{1,1} - 2y_{1,2} = 0 \\ 4y_{1,1} + (1 - \lambda_1)y_{1,2} = 0 \end{cases} \implies y_{1,2} = (1 - \lambda_1)y_{1,1}/2 = -i\sqrt{2}y_{1,1} \implies y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Analogamente si ottiene:  $y_2 = (1, +i\sqrt{2})$ . Considero la base degli autovettori  $y := \{y_1, y_2\}$ , denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $y_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij}e_j$ . Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{2} \\ 1 & +i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{2} & +i\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = 2i\sqrt{2}$$

pertanto

$$Q = \frac{1}{2i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & i\sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & -1 \\ i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la relazione  $A_y = QAQ^{-1}$  si può verificare che  $A_y$  è in forma diagonale. Ovvero

$$A_y = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 - 2i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base degli autovettori:

– scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Qx^0 = \frac{1}{2i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & -1 \\ i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} - \sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} + \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 + i \\ -1 - i \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_y t\}$ :

$$e^{A_y t} = \begin{pmatrix} e^{(1+2i\sqrt{2})t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i\sqrt{2})t} \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_y t\} y^0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{(1+2i\sqrt{2})t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i\sqrt{2})t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+i \\ -1-i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1+i)e^{(1+2i\sqrt{2})t} \\ (-1-i)e^{(1-2i\sqrt{2})t} \end{pmatrix}$$

Conclusione: per scrivere esplicitamente la soluzione del sistema di partenza devo ricondurre alla base canonica.

$$\begin{aligned} x(t) = Q^{-1}y(t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1+i)e^{(1+2i\sqrt{2})t} - (1+i)e^{(1-2i\sqrt{2})t} \\ -i\sqrt{2}(-1+i)e^{(1+2i\sqrt{2})t} - i\sqrt{2}(1+i)e^{(1-2i\sqrt{2})t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^t(\cos 2\sqrt{2}t + \sin 2\sqrt{2}t) \\ -\sqrt{2}e^t(\sin 2\sqrt{2}t - \cos 2\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Possibili verifiche: verificare che  $x(0) = (-1, \sqrt{2})$ . Verificare che il vettore  $x(t)$  soddisfa il sistema di partenza.

Soluzione 3.3.2 (secondo metodo): considero la base  $f := \{f_1, f_2\}$  con

$$f_1 := \frac{y_1 - y_2}{2i} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad f_2 := \frac{y_1 + y_2}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $f_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij}e_j$ ; si ha

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = \sqrt{2}$$

pertanto

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la relazione  $A_f = Q A Q^{-1}$  si può verificare che  $A_f$  è nella forma

$$A_f = Q A Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base  $\{f_1, f_2\}$ :

– scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Q x^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_f t\}$  usando la (3.11):

$$e^{A_f t} = e^t \begin{pmatrix} \cos(2\sqrt{2}t) & -\sin(2\sqrt{2}t) \\ \sin(2\sqrt{2}t) & \cos(2\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_f t\} y^0 = e^t \begin{pmatrix} \cos(2\sqrt{2}t) & -\sin(2\sqrt{2}t) \\ \sin(2\sqrt{2}t) & \cos(2\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -\cos(2\sqrt{2}t) + \sin(2\sqrt{2}t) \\ -\sin(2\sqrt{2}t) - \cos(2\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

Conclusione: per scrivere esplicitamente la soluzione del sistema di partenza devo ricondurre alla base canonica.

$$x(t) = Q^{-1}y(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos(2\sqrt{2}t) + \sin(2\sqrt{2}t) \\ -\sin(2\sqrt{2}t) - \cos(2\sqrt{2}t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -\cos(2\sqrt{2}t) - \sin(2\sqrt{2}t) \\ \sqrt{2}[-\sin(2\sqrt{2}t) + \cos(2\sqrt{2}t)] \end{pmatrix}$$

**Esercizio 3.3.3.** Risolvere il sistema  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , con dato iniziale  $x^0 = (-1, \sqrt{2})$  e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione: in primo luogo risolvo il problema agli autovalori per la matrice  $A$  scrivendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda I) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies (1 - \lambda)^2 - 8 = \lambda^2 - 2\lambda - 7 = 0$$

da cui si ottengono i due autovalori reali e distinti

$$\lambda_1 = 1 + 2\sqrt{2} \quad \lambda_2 = 1 - 2\sqrt{2}$$

La matrice è diagonalizzabile nella base degli autovettori. Determino gli autovettori  $y_1$  e  $y_2$ .

$$\begin{cases} (1 - \lambda_1)y_{1,1} + 2y_{1,2} = 0 \\ 4y_{1,1} + (1 - \lambda_1)y_{1,2} = 0 \end{cases} \implies y_{1,2} = -(1 - \lambda_1)y_{1,1}/2 = \sqrt{2}y_{1,1} \implies y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Analogamente si ottiene:  $y_2 = (1, -\sqrt{2})$ . Considero la base degli autovettori  $y := \{y_1, y_2\}$ , denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $y_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij}e_j$ . Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = -2\sqrt{2}$$

pertanto

$$Q = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la relazione  $A_y = QAQ^{-1}$  si può verificare che  $A_y$  è in forma diagonale. Ovvero

$$A_y = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base degli autovettori:

– scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Qx^0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} - \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_y t\}$ :

$$e^{A_y t} = \begin{pmatrix} e^{(1+2\sqrt{2})t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2\sqrt{2})t} \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_y t\}y^0 = \begin{pmatrix} e^{(1+2\sqrt{2})t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2\sqrt{2})t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{(1-2\sqrt{2})t} \end{pmatrix}$$

Conclusione: per scrivere esplicitamente la soluzione del sistema di partenza devo ricondurre alla base canonica.

$$x(t) = Q^{-1}y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{(1-2\sqrt{2})t} \end{pmatrix} = e^{(1-2\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Possibili verifiche: verificare che  $x(0) = (-1, \sqrt{2})$ . Verificare che il vettore  $x(t)$  soddisfa il sistema di partenza.

**Esercizio 3.3.4.** Risolvere il sistema  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ , con dato iniziale  $x^0 = (1, 0, 0)$  e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzione: in primo luogo risolvo il problema agli autovalori per la matrice  $A$  scrivendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda I) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies -(1 - \lambda)(2 - \lambda)(1 + \lambda) = 0$$

da cui si ottengono i tre autovalori reali e distinti

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -1$$

La matrice è diagonalizzabile nella base degli autovettori. Determino gli autovettori  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$ :

$$\begin{cases} -y_{1,1} = 0 \\ y_{1,1} - 3y_{1,3} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y_{1,1} = 0 \\ y_{1,3} = 0 \end{cases} \implies y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analogamente si ottiene:  $y_2 = (2, -2, 1)$  e  $y_3 = (0, 0, 1)$ . Considero la base degli autovettori  $y := \{y_1, y_2, y_3\}$ , denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $y_i = \sum_{j=1}^3 P_{ij} e_j$ . Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = -2$$

pertanto

$$Q = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la relazione  $A_y = Q A Q^{-1}$  si può verificare che  $A_y$  è in forma diagonale. Ovvero

$$A_y = Q A Q^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base degli autovettori:

– scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Q x^0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_y t\}$ :

$$e^{A_y t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_y t\}y^0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^t \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

Conclusione: per scrivere esplicitamente la soluzione del sistema di partenza devo ricondurmi alla base canonica.

$$x(t) = Q^{-1}y(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2e^t \\ -2e^t + 2e^{2t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix}$$

Possibili verifiche: verificare che  $x(0) = (1, 0, 0)$ . Verificare che il vettore  $x(t)$  soddisfa il sistema di partenza.

**Esercizio 3.3.5.** Risolvere il sistema  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ , con dato iniziale  $x^0 = (1, 0, 0)$  e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione: in primo luogo risolvo il problema agli autovalori per la matrice  $A$  scrivendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda I) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 3 \\ 1 & 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies (1 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0$$

da cui si ottengono i tre autovalori reali e distinti

$$\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -1$$

La matrice è diagonalizzabile nella base degli autovettori. Determino gli autovettori  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$ :

$$\begin{cases} -4y_{1,1} & = 0 \\ -3y_{1,2} + 3y_{1,3} & = 0 \\ y_{1,1} + 3y_{1,2} - 3y_{1,3} & = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y_{1,1} & = 0 \\ y_{1,2} & = y_{1,3} \end{cases} \implies y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente si ottiene:  $y_2 = (8, -3, 1)$  e  $y_3 = (0, -1, 1)$ . Considero la base degli autovettori  $y := \{y_1, y_2, y_3\}$ , denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $y_i = \sum_{j=1}^3 P_{ij}e_j$ . Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 8 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = -16$$

pertanto

$$Q = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -8 & 0 & 8 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la relazione  $A_y = QAQ^{-1}$  si può verificare che  $A_y$  è in forma diagonale. Ovvero

$$A_y = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base degli autovettori:

– scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Qx^0 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_y t\}$ :

$$e^{A_y t} = \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_y t\} y^0 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^t \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Conclusion: per scrivere esplicitamente la soluzione del sistema di partenza devo ricondirmi alla base canonica.

$$x(t) = Q^{-1}y(t) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8e^t \\ e^{5t} - 3e^t + 2e^{-t} \\ e^{5t} + e^t - 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Possibili verifiche: verificare che  $x(0) = (1, 0, 0)$ . Verificare che il vettore  $x(t)$  soddisfa il sistema di partenza.

**Esercizio 3.3.6.** Risolvere il sistema  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ , con dato iniziale  $x^0 = (1, 0, 0)$  e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione 3.3.6 (primo metodo): in primo luogo risolvo il problema agli autovalori per la matrice  $A$  scrivendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda I) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & -3 \\ 1 & 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies (1 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$$

da cui si ottengono i tre autovalori

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 + 3i \quad \lambda_3 = 2 - 3i$$

La matrice è semisemplice. Determino gli autovettori  $y_1, y_2$  e  $y_3$ :

$$\begin{cases} 0 & = & 0 \\ y_{1,2} - 3y_{1,3} & = & 0 \\ y_{1,1} + 3y_{1,2} + y_{1,3} & = & 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y_{1,2} & = & 3y_{1,3} \\ y_{1,1} & = & -3y_{1,2} - y_{1,3} \end{cases} \implies y_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente si ottiene:  $y_2 = (0, i, 1)$  e  $y_3 = (0, 1, i)$ . Considero la base degli autovettori  $y := \{y_1, y_2, y_3\}$ , denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $y_i = \sum_{j=1}^3 P_{ij} e_j$ . Si ha

$$P = \begin{pmatrix} -10 & 3 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 3 & i & 1 \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = 20$$

pertanto

$$Q = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -2 & 1-3i & 3-i \\ 0 & -10i & 10 \\ 0 & 10 & -10i \end{pmatrix}^T = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1-3i & -10i & 10 \\ 3-i & 10 & -10i \end{pmatrix}$$

Utilizzando la relazione  $A_y = Q A Q^{-1}$  si può verificare che  $A_y$  è in forma diagonale. Ovvero

$$A_y = Q A Q^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix}$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base degli autovettori:

– scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Q x^0 = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1-3i & -10i & 10 \\ 3-i & 10 & -10i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -2 \\ 1-3i \\ 3-i \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_y t\}$ :

$$e^{A_y t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{(2+3i)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(2-3i)t} \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_y t\} y^0 = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -2e^t \\ (1-3i)e^{(2+3i)t} \\ (3-i)e^{(2-3i)t} \end{pmatrix}$$

Conclusione: per scrivere esplicitamente la soluzione del sistema di partenza devo ricondurmi alla base canonica.

$$x(t) = Q^{-1} y(t) = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 20e^t \\ -6e^t + (i+3)e^{(2+3i)t} + (3-i)e^{(2-3i)t} \\ -2e^t + (1-3i)e^{(2+3i)t} + (1+3i)e^{(2-3i)t} \end{pmatrix}$$

Scrivo meglio le soluzioni:

$$x_1(t) = e^t$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{20} \{ -6e^t + e^{2t} [(3+i)(\cos 3t + i \sin 3t) + (3-i)(\cos 3t - i \sin 3t)] \} \\ &= \frac{1}{10} \{ -3e^t + e^{2t} (3 \cos 3t - \sin 3t) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \frac{1}{20} \{ -2e^t + e^{2t} [(1-3i)(\cos 3t + i \sin 3t) + (3i+1)(\cos 3t - i \sin 3t)] \} \\ &= \frac{1}{10} \{ -e^t + e^{2t} (\cos 3t + 3 \sin 3t) \} \end{aligned}$$

Possibili verifiche:  $x(0) = (1, 0, 0)$ ; il vettore  $x(t)$  soddisfa il sistema di partenza.

Soluzione 3.3.6 (secondo metodo): noti gli autovalori so che la matrice è semisemplice, quindi nella base degli autovettori la soluzione è nella forma

$$y(t) = e^{A_y t} y_0 = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{(2+3i)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(2-3i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ y_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{01} e^t \\ y_{02} e^{(2+3i)t} \\ y_{03} e^{(2-3i)t} \end{pmatrix}$$

Noti gli autovettori posso scrivere le matrici  $P$  e  $Q^{-1} = P^T$ , pertanto posso scrivere la soluzione nella base canonica

$$x(t) = Q^{-1} y(t) = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 3 & i & 1 \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{01} e^t \\ y_{02} e^{(2+3i)t} \\ y_{03} e^{(2-3i)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10y_{01} e^t \\ 3y_{01} e^t + iy_{02} e^{(2+3i)t} + y_{03} e^{(2-3i)t} \\ y_{01} e^t + y_{02} e^{(2+3i)t} + iy_{03} e^{(2-3i)t} \end{pmatrix}$$

Per determinare i coefficienti  $y_{01}, y_{02}, y_{03}$  è sufficiente richiedere che  $x(0) = x^0$ . Allora

$$\begin{cases} -10y_{01} & = 1 \\ 3y_{01} + iy_{02} + y_{03} & = 0 \\ y_{01} + y_{02} + iy_{03} & = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y_{01} & = -1/10 \\ y_{02} & = (1 - 3i)/20 \\ y_{03} & = (3 - i)/20 \end{cases}$$

Soluzione 3.3.6 (terzo metodo): considero per gli autovettori della matrice  $A$  la rappresentazione

$$y_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ +i \end{pmatrix}$$

Risolvo, quindi, il sistema nella base  $f := \{f_1, f_2, f_3\}$ , ove

$$f_1 = y_1 \quad f_2 = \frac{y_2 - y_3}{2i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad f_3 = \frac{y_2 + y_3}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $f_i = \sum_{j=1}^3 P_{ij}e_j$ . Si ha

$$P = \begin{pmatrix} -10 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = -10$$

pertanto

$$Q = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \\ -3 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la relazione  $A_f = QAQ^{-1}$  si può verificare che

$$A_f = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base  $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ :

– scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Qx^0 = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \\ -3 & -10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_f t\}$ :

$$e^{A_f t} = \exp \begin{pmatrix} Bt & 0 \\ 0 & Ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{Bt} & 0 \\ 0 & e^{Ct} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} \cos 3t & -e^{2t} \sin 3t \\ 0 & e^{2t} \sin 3t & e^{2t} \cos 3t \end{pmatrix}$$

ove si è posto  $B = (1)$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  e si è usata la proprietà

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{N} \implies \exp \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{A_1} & 0 \\ 0 & e^{A_2} \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_f t\} y^0 = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t}(\cos 3t + 3 \sin 3t) \\ e^{2t}(\sin 3t - 3 \cos 3t) \end{pmatrix}$$

Tornando alla base canonica si ottiene la soluzione già determinata.

**Esercizio 3.3.7.** Risolvere il sistema  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ , con dato iniziale  $x^0 = (a_1, a_2, a_3)$  e

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Risolvo il problema agli autovalori per la matrice  $A$  scrivendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies (2 - \lambda)^3 = 0,$$

da cui si ottengono i tre autovalori reali e coincidenti  $\lambda_{1,2,3} = 2$ . La matrice  $A$  non è diagonalizzabile, ma si può scrivere  $A = 2\mathbb{I} + \mathcal{N}$  ove

$$\mathcal{N} := A - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è una matrice nilpotente di ordine 3. Infatti

$$\mathcal{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi si può scrivere l'esponenziale della matrice  $A$  nel modo seguente:

$$e^{At} = e^{2t\mathbb{I} + \mathcal{N}t} = e^{2t\mathbb{I}} \times e^{\mathcal{N}t} = e^{2t\mathbb{I}} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathcal{N}t)^k = e^{2t\mathbb{I}} \times \left[ \mathbb{I} + \mathcal{N}t + \frac{1}{2} \mathcal{N}^2 t^2 \right] = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t + t^2/2 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}$$

Infine scrivo la soluzione del sistema:

$$x(t) = e^{At} x^0 = e^{2t} \begin{pmatrix} a_1 + a_2(t + t^2/2) + a_3 t \\ a_2 \\ a_2 t + a_3 \end{pmatrix}$$

Verificare che il vettore  $x(t)$  soddisfa il sistema di partenza.

**Esercizio 3.3.8.** Risolvere il sistema  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , con dato iniziale  $x^0 = (-1, 2)$  e

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzione 3.3.8 (primo metodo): in primo luogo risolvo il problema agli autovalori per la matrice  $A$  scrivendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 2 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies -(3 - \lambda)(1 + \lambda) + 4 = (\lambda - 1)^2 = 0$$

da cui si ottengono i due autovalori reali e coincidenti  $\lambda_{1,2} = 1$ . Cerco la base  $y := \{y_1, y_2\}$  in cui la matrice  $A$  si riduce alla forma canonica

$$A_y = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

In altri termini cerco la matrice  $2 \times 2$   $Q$  tale che  $A_y = Q A Q^{-1}$ . Allora,

$$A_y = Q A Q^{-1} \implies A_y Q = Q A \implies \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q + \mathbb{I} Q = Q A \stackrel{[\mathbb{I}, Q]=0}{\implies} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q = Q(A - \mathbb{I})$$

$$\implies \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a+b = 0 \\ 2(c+d) = a \\ 2(c+d) = -b \end{cases} \implies \begin{cases} b = -a \\ a = 2(c+d) \end{cases}$$

da cui si ottiene la possibile scelta  $c = 0$ ,  $d = 1$ ,  $a = 2$  e  $b = -2$ . Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base  $y$  individuata dalla matrice per il cambiamento delle coordinate  $Q$  sopra determinata:

– scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Q x^0 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_y t\}$ :

$$e^{A_y t} = e^{\mathbb{I}t + \mathcal{N}t} \stackrel{[\mathbb{I}, \mathcal{N}]=0}{=} e^{\mathbb{I}t} e^{\mathcal{N}t} = e^t \mathbb{I} e^{\mathcal{N}t} = e^t \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathcal{N}t)^k}{k!} = e^t [\mathbb{I} + \mathcal{N}t] = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

ove si è posto  $\mathcal{N} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e si è osservato che  $\mathcal{N} \cdot \mathcal{N} = 0$ .

– Scrivo la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_y t\} y^0 = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2e^t \begin{pmatrix} -3 \\ -3t + 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion: per scrivere la soluzione del sistema di partenza devo ricondurmi alla base canonica.

$$x(t) = Q^{-1} y(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} 2e^t \begin{pmatrix} -3 \\ -3t + 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -1 - 6t \\ 2 - 6t \end{pmatrix}$$

Soluzione 3.3.8 (secondo metodo): osservo che si può scrivere

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \mathbb{I} + \mathcal{N}$$

ove si è posto  $\mathcal{N} := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ . Si osserva che  $\mathcal{N} \cdot \mathcal{N} = 0$  e  $[\mathbb{I}, \mathcal{N}] = 0$ , allora

$$e^{At} = e^{\mathbb{I}t + \mathcal{N}t} \stackrel{[\mathbb{I}, \mathcal{N}]=0}{=} e^{\mathbb{I}t} e^{\mathcal{N}t} = e^t \mathbb{I} e^{\mathcal{N}t} = e^t \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathcal{N}t)^k}{k!} = e^t [\mathbb{I} + \mathcal{N}t] = e^t \begin{pmatrix} 1 + 2t & -2t \\ 2t & 1 - 2t \end{pmatrix}$$

Quindi si ha che la soluzione è data da

$$x(t) = e^{At} x^0 = e^t \begin{pmatrix} 1 + 2t & -2t \\ 2t & 1 - 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -1 - 6t \\ 2 - 6t \end{pmatrix}$$

**Esercizio 3.3.9.** Risolvere l'equazione differenziale lineare del secondo ordine che descrive il moto armonico semplice:

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \tag{3.12}$$

con  $\omega \in \mathbb{R}$  e  $\omega > 0$ . Si supponga  $z(0) = a > 0$  e  $\dot{z}(0) = 0$ .

Soluzione 3.3.9 (primo metodo): l'equazione (3.12) può essere scritta come un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine per mezzo delle nuove variabili  $x_1 := z$  e  $x_2 := \dot{z}$ . Infatti

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{z} \\ \dot{x}_2 = \ddot{z} = -\omega^2 z \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 \end{cases}$$

Pertanto ci si è ricondotti ad un sistema nella forma  $\dot{x} = Ax$  con  $x \in \mathbb{R}$ ,  $A$  la matrice reale  $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

e dato iniziale  $x^0 = (a, 0)$ . Risolvo il problema agli autovalori per la matrice  $A$  scrivendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda I) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \implies \lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad ,$$

da cui si ottengono i due autovalori complessi coniugati

$$\lambda_1 = +i\omega \quad \lambda_2 = -i\omega \quad .$$

La matrice è semisemplice, quindi è diagonalizzabile nella base degli autovettori. Determino gli autovettori  $y_1$  e  $y_2$ .

$$\begin{cases} -i\omega y_{1,1} + y_{1,2} & = 0 \\ -\omega^2 y_{1,1} - i\omega y_{1,2} & = 0 \end{cases} \implies y_{1,2} = i\omega y_{1,1} \implies y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}$$

Analogamente si ottiene:  $y_2 = (1, -i\omega)$ . Considero la base degli autovettori  $y := \{y_1, y_2\}$ , denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $y_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij} e_j$ . Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 1 & +i\omega \\ 1 & -i\omega \end{pmatrix}$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = -2i\omega$$

pertanto

$$Q = -\frac{1}{2i\omega} \begin{pmatrix} -i\omega & -i\omega \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{2i\omega} \begin{pmatrix} -i\omega & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la relazione  $A_y = Q A Q^{-1}$  si può verificare che  $A_y$  è in forma diagonale. Ovvero

$$A_y = Q A Q^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base degli autovettori:

– scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Q x^0 = \frac{i}{2\omega} \begin{pmatrix} -i\omega & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2\omega} \begin{pmatrix} -i\omega a \\ -i\omega a \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_y t\}$ :

$$e^{A_y t} = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

– Scrivo la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_y t\} y^0 = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

Conclusione: per scrivere la soluzione del sistema di partenza devo ricondurre alla base canonica.

$$x(t) = Q^{-1} y(t) = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \\ i\omega e^{i\omega t} - i\omega e^{-i\omega t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \omega t \\ -a \omega \sin \omega t \end{pmatrix}$$

Possibili verifiche: verificare che  $x(0) = (a, 0)$ . Verificare che il vettore  $x(t)$  soddisfa il sistema di partenza. Commento: la soluzione dell'equazione del moto armonico semplice con dato iniziale  $z(0) = a$  è  $z(t) = a \cos \omega t$ , ovvero la particella compie delle oscillazioni di ampiezza  $a$  e di periodo  $T = 2\pi/\omega$  attorno all'origine.

Soluzione 3.3.9 (secondo metodo): considero la base  $f := \{f_1, f_2\}$  con

$$f_1 := \frac{y_1 - y_2}{2i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad f_2 := \frac{y_1 + y_2}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $f_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij}e_j$ ; si ha

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = -\omega$$

pertanto

$$Q = -\frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la relazione  $A_f = QAQ^{-1}$  si può verificare che  $A_f$  è nella forma

$$A_f = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base  $f = \{f_1, f_2\}$ :

– scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Qx^0 = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_f t\}$  usando la (3.11):

$$e^{A_f t} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_f t\}y^0 = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin \omega t \\ a \cos \omega t \end{pmatrix}$$

Conclusione: per scrivere esplicitamente la soluzione del sistema di partenza devo ricondurre alla base canonica.

$$x(t) = Q^{-1}y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \sin \omega t \\ a \cos \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \omega t \\ -a\omega \sin \omega t \end{pmatrix}$$

**Esercizio 3.3.10.** Risolvere l'equazione differenziale lineare del secondo ordine che descrive il moto armonico smorzato:

$$\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega^2 z = 0 \tag{3.13}$$

con  $\omega, \gamma \in \mathbb{R}$  e  $\gamma, \omega > 0$ . Si supponga  $z(0) = a > 0$  e  $\dot{z}(0) = 0$ .

Soluzione: l'equazione (3.13) può essere scritta come un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine per mezzo delle nuove variabili  $x_1 := z$  e  $x_2 := \dot{z}$ . Infatti

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{z} \\ \dot{x}_2 = \ddot{z} = -\gamma \dot{z} - \omega^2 z \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - \gamma x_2 \end{cases}$$

Pertanto ci si è ricondotti ad un sistema nella forma  $\dot{x} = Ax$  con  $x \in \mathbb{R}$ ,  $A$  la matrice reale  $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}$$

e dato iniziale  $x^0 = (a, 0)$ . Risolvo il problema agli autovalori per la matrice  $A$  scrivendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies \lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0 \quad ,$$

da cui si ottengono i due autovalori

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2} \quad .$$

Le caratteristiche degli autovalori dipendono dal discriminante  $\Delta := \gamma^2 - 4\omega^2$ . Bisogna distinguere tre casi:  $\Delta = 0$ ,  $\Delta < 0$  e  $\Delta > 0$ .

*Caso 1:*  $\Delta = 0$ , ovvero  $\gamma = 2\omega$ . In questo caso gli autovalori sono reali e coincidenti  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma/2 = -\omega$ . La matrice  $A$  non è diagonalizzabile, ma si può scrivere  $A = -\omega \mathbb{I} + \mathcal{N}$  ove

$$\mathcal{N} := A + \omega \mathbb{I} = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix}$$

è una matrice nilpotente di ordine 2. Infatti

$$\mathcal{N}^2 = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi si può scrivere l'esponenziale della matrice  $A$  nel modo seguente:

$$e^{At} = e^{-\omega t \mathbb{I} + \mathcal{N}t} = e^{-\omega t \mathbb{I}} \times e^{\mathcal{N}t} = e^{-\omega t \mathbb{I}} \times [\mathbb{I} + \mathcal{N}t] = e^{-\omega t} \begin{pmatrix} 1 + \omega t & t \\ -\omega^2 t & 1 - \omega t \end{pmatrix}$$

Infine scrivo la soluzione del sistema:

$$x(t) = e^{At} x^0 = e^{-\omega t} \begin{pmatrix} 1 + \omega t & t \\ -\omega^2 t & 1 - \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a e^{-\omega t} \begin{pmatrix} 1 + \omega t \\ -\omega^2 t \end{pmatrix}$$

Più esplicitamente:

$$\begin{cases} x_1(t) = a e^{-\omega t} (1 + \omega t) \\ x_2(t) = -a \omega^2 t e^{-\omega t} \end{cases}$$

ovvero la particella dalla posizione  $z(0) = a$  si muove asintoticamente verso l'origine  $z(t) \rightarrow \infty$  per  $t \rightarrow \infty$  (*smorzamento critico*). Possibili verifiche: verificare che  $x(0) = (a, 0)$ . Verificare che il vettore  $x(t)$  soddisfa il sistema di partenza.

*Caso 2:*  $\Delta < 0$ , ovvero  $\gamma < 2\omega$ . Pongo  $\delta := \sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}$ , quindi

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + i\delta}{2} \quad \lambda_2 = \frac{-\gamma - i\delta}{2}$$

Facilmente si ottengono gli autovettori:

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ (-\gamma + i\delta)/2 \end{pmatrix} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ (-\gamma - i\delta)/2 \end{pmatrix}$$

Considero la base  $f := \{f_1, f_2\}$  con

$$f_1 := \frac{y_1 - y_2}{2i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta/2 \end{pmatrix} \quad f_2 := \frac{y_1 + y_2}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma/2 \end{pmatrix}$$

Denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $f_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij} e_j$ ; si ha

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \delta/2 \\ 1 & -\gamma/2 \end{pmatrix}$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta/2 & -\gamma/2 \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = -\frac{\delta}{2}$$

pertanto

$$Q = -\frac{2}{\delta} \begin{pmatrix} -\gamma/2 & -\delta/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \gamma & 2 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la relazione  $A_f = QAQ^{-1}$  si può verificare che  $A_f$  è nella forma

$$A_f = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} -\gamma/2 & -\delta/2 \\ \delta/2 & -\gamma/2 \end{pmatrix}$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base  $f = \{f_1, f_2\}$ :

– scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Qx^0 = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \gamma & 2 \\ \delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{\delta} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_f t\}$  usando la (3.11):

$$e^{A_f t} = e^{-\gamma t/2} \begin{pmatrix} \cos(\delta t/2) & -\sin(\delta t/2) \\ \sin(\delta t/2) & \cos(\delta t/2) \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_f t\} y^0 = e^{-\gamma t/2} \begin{pmatrix} \cos(\delta t/2) & -\sin(\delta t/2) \\ \sin(\delta t/2) & \cos(\delta t/2) \end{pmatrix} \frac{a}{\delta} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \frac{a}{\delta} e^{-\gamma t/2} \begin{pmatrix} \gamma \cos(\delta t/2) - \delta \sin(\delta t/2) \\ \gamma \sin(\delta t/2) + \delta \cos(\delta t/2) \end{pmatrix}$$

Conclusione: per scrivere esplicitamente la soluzione del sistema di partenza devo ricondirmi alla base canonica.

$$\begin{aligned} x(t) &= Q^{-1}y(t) = \frac{a}{\delta} e^{-\gamma t/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta/2 & -\gamma/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \cos(\delta t/2) - \delta \sin(\delta t/2) \\ \gamma \sin(\delta t/2) + \delta \cos(\delta t/2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{a}{\delta} e^{-\gamma t/2} \begin{pmatrix} \gamma \sin(\delta t/2) + \delta \cos(\delta t/2) \\ -(\delta^2/2) \sin(\delta t/2) - (\gamma^2/2) \sin(\delta t/2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Scrivo, infine, la soluzione dell'equazione (3.13):

$$\begin{aligned} z(t) &= x_1(t) = \frac{a}{\delta} e^{-\gamma t/2} \left( \gamma \sin \frac{\delta}{2} t + \delta \cos \frac{\delta}{2} t \right) = \frac{a\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}}{\delta} e^{-\gamma t/2} \left( \cos \varphi \sin \frac{\delta}{2} t + \sin \varphi \cos \frac{\delta}{2} t \right) \\ &= \frac{a\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}}{\delta} e^{-\gamma t/2} \sin \left( \frac{\delta}{2} t + \varphi \right) = \frac{2\omega a}{\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t/2} \sin \left( \frac{\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}}{2} t + \varphi \right) \end{aligned}$$

ove si è posto  $\cos \varphi = \gamma/\sqrt{\delta^2 + \gamma^2}$  e  $\sin \varphi = \delta/\sqrt{\delta^2 + \gamma^2}$ . La particella compie delle oscillazioni di ampiezza esponenzialmente decrescente attorno all'origine: *oscillazioni smorzate*.

*Caso 3:*  $\Delta < 0$ , ovvero  $\gamma > 2\omega$ . In questo caso gli autovalori sono reali e distinti, quindi la matrice è diagonalizzabile. Gli autovalori diventano

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Determino gli autovettori  $y_1$  e  $y_2$ .

$$\begin{cases} -\lambda_1 y_{1,1} + y_{1,2} & = 0 \\ -\omega^2 y_{1,1} - (\gamma + \lambda_1) y_{1,2} & = 0 \end{cases} \implies y_{1,2} = \lambda_1 y_{1,1} \implies y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix}$$

Analogamente si ottiene:  $y_2 = (1, (-\gamma - \sqrt{\Delta})/2)$ . Considero la base degli autovettori  $y := \{y_1, y_2\}$ , denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $y_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij} e_j$ . Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} \\ 1 & \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix}$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-\gamma+\sqrt{\Delta}}{2} & \frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = \frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} - \frac{-\gamma+\sqrt{\Delta}}{2} = -\sqrt{\Delta}$$

pertanto

$$Q = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} & \frac{\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} & -1 \\ \frac{\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la relazione  $A_y = Q A Q^{-1}$  si può verificare che  $A_y$  è in forma diagonale. Ovvero

$$A_y = Q A Q^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\gamma+\sqrt{\Delta}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix}$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base degli autovettori:

– scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Q x^0 = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} & -1 \\ \frac{\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{a}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} \\ \frac{\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix}$$

– Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_y t\}$ :

$$e^{A_y t} = \begin{pmatrix} \exp\{\frac{-\gamma+\sqrt{\Delta}}{2}t\} & 0 \\ 0 & \exp\{\frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2}t\} \end{pmatrix}$$

– Scrivo la soluzione nella nuova base:

$$\begin{aligned} y(t) = \exp\{A_y t\} y^0 &= -\frac{a}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \exp\{\frac{-\gamma+\sqrt{\Delta}}{2}t\} & 0 \\ 0 & \exp\{\frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2}t\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} \\ \frac{\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{a}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} \exp\{\frac{-\gamma+\sqrt{\Delta}}{2}t\} \\ \frac{\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} \exp\{\frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2}t\} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion: per scrivere la soluzione del sistema di partenza devo ricondurre alla base canonica.

$$\begin{aligned} x(t) = Q^{-1} y(t) &= -\frac{a}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-\gamma+\sqrt{\Delta}}{2} & \frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} \exp\{\frac{-\gamma+\sqrt{\Delta}}{2}t\} \\ \frac{\gamma-\sqrt{\Delta}}{2} \exp\{\frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2}t\} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{a}{2\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} -(\gamma + \sqrt{\Delta}) \exp\{\frac{-\gamma+\sqrt{\Delta}}{2}t\} + (\gamma - \sqrt{\Delta}) \exp\{\frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2}t\} \\ \frac{\gamma^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{2} \exp\{\frac{-\gamma+\sqrt{\Delta}}{2}t\} - \frac{\gamma^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{2} \exp\{\frac{-\gamma-\sqrt{\Delta}}{2}t\} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si nota che  $(\sqrt{\Delta})^2 = \Delta$  se  $\Delta > 0$ , mentre  $(\sqrt{\Delta})^2 = -|\Delta|$  se  $\Delta < 0$ . Possibili verifiche: verificare che  $x(0) = (a, 0)$ . Verificare che il vettore  $x(t)$  soddisfa il sistema di partenza. Commento: la soluzione dell'equazione del moto armonico smorzato, nel caso  $\Delta = \gamma^2 - 4\omega^2 > 0$ , con dato iniziale  $z(0) = a$  è

$$z(t) = \frac{a}{2\sqrt{\Delta}} \left[ (\gamma + \sqrt{\Delta}) \exp\left\{\frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2}t\right\} - (\gamma - \sqrt{\Delta}) \exp\left\{\frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2}t\right\} \right]$$

Poiché  $\gamma > \sqrt{\Delta}$  entrambi gli esponenziali sono decrescenti. Quindi la particella, inizialmente in  $a$ , si muove asintoticamente verso l'origine. Nel caso  $\Delta < 0$  si possono ritrovare i risultati del Caso 2:

$$z(t) = -\frac{a}{2i\sqrt{|\Delta|}} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[ -(\gamma + i\sqrt{|\Delta|}) \exp\left\{i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t\right\} + (\gamma - i\sqrt{|\Delta|}) \exp\left\{-i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t\right\} \right]$$

$$= \dots \text{ un po' di algebra } \dots = \frac{2a\omega}{\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin\left(\frac{\delta t}{2} + \varphi\right)$$

dove  $\delta := \sqrt{|\Delta|}$  e  $\varphi$  è tale che  $\sin \varphi = \delta/\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}$  e  $\cos \varphi = \gamma/\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}$ .

**Esercizio 3.3.11.** Risolvere l'equazione differenziale lineare del secondo ordine che descrive la caduta di un grave immerso in un fluido viscoso:

$$m\ddot{z} = -b\dot{z} + mg \implies \ddot{z} + \gamma\dot{z} = g \quad \text{con } \gamma, \omega > 0 \quad (3.14)$$

con condizioni iniziali  $z(0) = a > 0$  e  $\dot{z}(0) = 0$ .

Soluzione: l'equazione (3.14) può essere scritta come un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine per mezzo delle nuove variabili  $x_1 := z$  e  $x_2 := \dot{z}$ . Infatti

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{z} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{z} = -\gamma x_2 + g \end{cases} \implies \dot{x} = Ax + B \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

Scrivo l'equazione secolare e determino gli autovalori della matrice  $A$ :

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\gamma - \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda + \gamma) = 0 \implies \lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\gamma$$

La matrice è diagonalizzabile nella base degli autovettori. Determino gli autovettori  $y_1$  e  $y_2$ . Facilmente si ottiene:

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma \end{pmatrix}$$

Considero la base degli autovettori  $y := \{y_1, y_2\}$ , denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $y_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij}e_j$ . Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = -\gamma$$

pertanto

$$Q = -\frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la relazione  $A_y = QAQ^{-1}$  si può verificare che  $A_y$  è in forma diagonale. Ovvero

$$A_y = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

Riscrivo il sistema nella base degli autovettori:

$$\dot{x} = Ax + B \implies Q\dot{x} = QAQ^{-1}Qx + QB \implies \dot{y} = A_y y + B_y$$

ove si è posto  $y = Qx$  e  $B_y = QB = g/\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . L'equazione precedente ammette la soluzione (3.10): scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Qx^0 = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_y t\}$ :

$$e^{A_y t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t} \end{pmatrix}$$

Infine la soluzione nella nuova base:

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp\{A_y t\} \left[ y^0 + \int_0^t ds e^{-A_y s} B_y(s) \right] = \exp\{A_y t\} \left[ y^0 + \frac{g}{\gamma} \int_0^t ds \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\gamma s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \exp\{A_y t\} \left[ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{g}{\gamma} \begin{pmatrix} t \\ (1/\gamma)[e^{\gamma s}]_0^t \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a + gt/\gamma \\ (g/\gamma^2)(e^{\gamma t} - 1) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ove si è usato  $-A_y s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma s \end{pmatrix}$ . Scrivo esplicitamente la soluzione nella base canonica:

$$x(t) = Q^{-1}y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + gt/\gamma \\ (g/\gamma^2)(e^{\gamma t} - 1) \end{pmatrix}$$

da cui si ottengono le leggi orarie per la caduta della particella nel fluido viscoso:

$$\begin{aligned} z(t) &= a + \frac{g}{\gamma}t + \frac{g}{\gamma^2}(e^{-\gamma t} - 1) \\ \dot{z}(t) &= \frac{g}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) \end{aligned}$$

A tempi lunghi la particella cade con velocità uniforme  $g/\gamma$ .

**Esercizio 3.3.12.** Risolvere l'equazione differenziale lineare del secondo ordine che descrive le oscillazioni di un corpo sottoposto all'azione di una forza esterna oscillante:

$$m\ddot{z} = -k_1 z + k_2 \sin \Omega t \implies \ddot{z} + \omega^2 z = F \sin \Omega t \quad \text{con } \omega, \Omega > 0 \quad (3.15)$$

con condizioni iniziali  $z(0) = a > 0$  e  $\dot{z}(0) = 0$ .

Soluzione: l'equazione (3.15) può essere scritta come un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine per mezzo delle nuove variabili  $x_1 := z$  e  $x_2 := \dot{z}$ . Infatti

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{z} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{z} = -\omega^2 x_1 + F \sin \Omega t \end{cases} \implies \dot{x} = Ax + B(t) \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ F \sin \Omega t \end{pmatrix}$$

Riscrivo il sistema nella base  $f := \{f_1, f_2\}$  ottenuta nell'Esercizio 3.3.9:

$$\dot{x} = Ax + B(t) \implies Q\dot{x} = QAQ^{-1}Qx + QB(t) \implies \dot{y} = A_f y + B_f(t)$$

ove si è posto  $y = Qx$  e  $B_f(t) = QB(t) = (F/\omega) \sin \Omega t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . L'equazione precedente ammette la soluzione (3.10): scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Qx^0 = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$

Scrivo esplicitamente gli esponenziali  $\exp\{A_f t\}$  e  $\exp\{-A_f t\}$  (uso l'equazione (3.11):

$$e^{A_f t} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \quad e^{-A_f t} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

si osservi, a margine, che  $e^{A_f t} e^{-A_f t} = \mathbb{I}$ . Infine la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_f t\} \left[ y^0 + \int_0^t ds e^{-A_f s} B_f(s) \right]$$

calcolo il secondo addendo:

$$\int_0^t ds e^{-A_f s} B_f(s) = \frac{F}{\omega} \int_0^t ds \sin \Omega s \begin{pmatrix} \cos \omega s & \sin \omega s \\ -\sin \omega s & \cos \omega s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{F}{\omega} \int_0^t ds \sin \Omega s \begin{pmatrix} \cos \omega s \\ -\sin \omega s \end{pmatrix}$$

$$= \frac{F}{2\omega} \int_0^t ds \begin{pmatrix} \sin(\Omega + \omega)t + \sin(\Omega - \omega)t \\ \cos(\Omega + \omega)t - \cos(\Omega - \omega)t \end{pmatrix} = \frac{F}{2\omega} \begin{pmatrix} \frac{2\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} - \frac{1}{\Omega + \omega} \cos(\Omega + \omega)t - \frac{1}{\Omega - \omega} \cos(\Omega - \omega)t \\ \frac{1}{\Omega + \omega} \sin(\Omega + \omega)t - \frac{1}{\Omega - \omega} \sin(\Omega - \omega)t \end{pmatrix}$$

avendo usato nella terza uguaglianza le fomule di prostaferesi. Con un po' di algebra si scrive dapprima la soluzione nella base  $f = \{f_1, f_2\}$ :

$$y(t) = \begin{pmatrix} -a \sin \omega t \\ a \cos \omega t \end{pmatrix} + \frac{F}{2\omega} \begin{pmatrix} \frac{2\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \cos \omega t - \frac{2\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \cos \Omega t \\ \frac{2\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \sin \omega t - \frac{2\omega}{\Omega^2 - \omega^2} \sin \Omega t \end{pmatrix}$$

e infine la soluzione nella base canonica

$$x(t) = Q^{-1}y(t) = \begin{pmatrix} a \cos \omega t + F \frac{\Omega/\omega}{\Omega^2 - \omega^2} \sin \omega t - \frac{F}{\Omega^2 - \omega^2} \sin \Omega t \\ -a\omega \sin \omega t + \frac{F\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \cos \omega t - \frac{F\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \cos \Omega t \end{pmatrix}$$

### 3.4. Equazioni differenziali a variabili separabili.

Si consideri un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine  $\dot{x} = f(x, t)$  con  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si consideri il problema di Cauchy

$$\dot{x} = f(x, t) \quad \text{con} \quad x(0) = x^0 \in \mathbb{R} \quad (3.16)$$

Se la funzione  $f(x, t)$  è nella forma  $f(x, t) = g(x)h(t)$  allora l'equazione è a variabili separabili e la soluzione del problema (3.16) si determina con un'integrazione ordinaria:

$$\int_{x^0}^{x(t)} \frac{dx}{g(x)} = \int_0^t h(t') dt' \quad (3.17)$$

**Esercizio 3.4.2.** Si risolva il problema  $\dot{x} = x$  con dato iniziale  $x(0) = 1$ .

Soluzione: la funzione  $f(x, t) = x$  è di classe  $C^1$ , quindi è Lipschitziana, pertanto il problema ammette una soluzione unica. L'equazione è a variabili separabili con  $g(x) = x$  e  $h(t) = 1$ . Pertanto

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt' \implies \log |x(t)| = t + \text{cost} \implies |x(t)| = e^{\text{cost}} e^t = C e^t \quad \text{con} \quad C > 0$$

$$\implies x(t) = C e^t \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}$$

Imponendo  $x(0) = 1$  si ottiene  $C = 1$ . E quindi  $x(t) = \exp\{t\}$ .

**Esercizio 3.4.3.** Si risolva l'equazione  $\dot{x} = (t + x)^2$ .

Soluzione: la funzione  $f(x, t) = (t + x)^2$  non è nella forma  $f(x, t) = g(x)h(t)$ , ciononostante con un opportuno cambiamento di variabili l'equazione può essere scritta in forma separabile. Si pone  $y(t) = x(t) + t$ . Derivando si ottiene  $\dot{y} = \dot{x} + 1$ . Sostituendo l'equazione diventa:  $\dot{y} - 1 = y^2$ , ovvero  $\dot{y} = y^2 + 1$  che può essere separata scrivendo  $g(y) = y^2 + 1$  e  $h(t) = 1$ . Pertanto:

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dt \implies \arctan y = t + \text{cost} \implies \arctan(x + t) = t + \text{cost} \quad .$$

### 3.5. Sistemi dinamici unidimensionali.

Un sistema dinamico unidimensionale è un'equazione differenziale del primo ordine autonoma, ovvero nella forma

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.18)$$

dove  $x \in \mathbb{R}$   $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione abbastanza regolare. Sotto opportune ipotesi di regolarità su  $f$  la soluzione dell'equazione (3.18) con dato iniziale  $x(0) = x^0$  esiste ed è unica.

**Esercizio 3.5.2.** Il modello di Malthus per la riproduzione normale prevede che il tasso di accrescimento di una popolazione sia proporzionale al numero di individui. Si scriva l'equazione del modello. Si determinino i punti fissi. Si disegni il ritratto di fase nel piano delle fasi esteso e si studino euristicamente le proprietà di stabilità dei punti fissi. Si determini esplicitamente l'equazione delle linee di fase.

Soluzione: l'equazione è  $\dot{x} = kx$  con  $k \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.5.3.** Si supponga che il tasso di crescita di una popolazione sia proporzionale al quadrato del numero di individui. Si scriva l'equazione del modello. Si determinino i punti fissi. Si disegni il ritratto di fase nel piano delle fasi esteso e si studino euristicamente le proprietà di stabilità dei punti fissi. Si determini esplicitamente l'equazione delle linee di fase e si mostri che le curve esplodono in un tempo finito.

Soluzione: l'equazione è  $\dot{x} = kx^2$  con  $k \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.5.4.** Supponendo uniforme la temperatura dell'atmosfera e supponendo che l'aria si comporti come un gas ideale, si costruisca un modello per la variazione della pressione con la quota. Sapendo che densità dell'aria al livello del mare vale  $1250 \text{ g/m}^3$ , si determini a quale altezza la pressione si dimezza.

Soluzione: l'equazione è  $\dot{p} = -[g/(RT)]p$ , la quota di dimezzamento è  $h = (RT/g) \log 2 = 5.54 \text{ km}$ .

**Esercizio 3.5.5.** Il modello logistico si ottiene da quello di Malthus supponendo che la costante di proporzionalità dipenda in realtà dal numero di individui come  $1 - x$ . Si scriva l'equazione del modello. Si determinino i punti fissi. Si disegni il ritratto di fase nel piano delle fasi esteso e si studino euristicamente le proprietà di stabilità dei punti fissi. Si determini esplicitamente l'equazione delle linee di fase.

Soluzione: l'equazione è  $\dot{x} = (1 - x)x$ .

**Esercizio 3.5.6.** Si modifichi l'equazione logistica supponendo che la popolazione venga decimata con tasso costante  $c$ . Si scriva l'equazione del modello. Si determinino i punti fissi. Si disegni il ritratto di fase nel piano delle fasi esteso al variare di  $c$  e si studino euristicamente le proprietà di stabilità dei punti fissi. Si determini esplicitamente l'equazione delle linee di fase.

Soluzione: l'equazione è  $\dot{x} = (1 - x)x - c$  con  $c \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.5.7.** Una variazione sul tema dell'equazione logistica permette di studiare l'evoluzione della popolazione degli insetti dell'abete rosso tenendo in conto l'effetto dei predatori. L'equazione si scrive nella forma

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{q}\right) - \frac{N^2}{1 + N^2} \quad (3.19)$$

con  $r, q \geq 0$ . Si disegni il diagramma di fase del modello nel piano  $q-r$ , ovvero si determinino il numero di punti fissi al variare dei parametri. Si disegni il ritratto di fase nelle diverse regioni del diagramma di fase.

**Esercizio 3.5.8.** Sia  $T$  la temperatura di un copro all'istante  $t$  immerso in un fluido (il mare) tenuto a temperatura costante  $T_e$ . La legge di Newton afferma che la temperatura del corpo varia con il tempo con un tasso di segno opposto e proporzionale a  $T(t) - T_e$ . Si scriva l'equazione del modello. Si determinino i punti fissi. Si disegni il ritratto di fase nel piano delle fasi esteso e si studino euristicamente le proprietà di stabilità dei punti fissi. Si determini esplicitamente l'equazione delle linee di fase.

Soluzione: l'equazione è  $\dot{T} = -k(T - T_e)$  con  $k \geq 0$ .

**Esercizio 3.5.9.** Il numero di isotopi radioattivi decade con tasso proporzionale al numero di individui. Si scriva l'equazione del modello. Si determinino i punti fissi. Si disegni il ritratto di fase nel piano delle fasi esteso

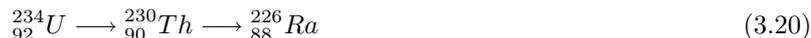
e si studino euristicamente le proprietà di stabilità dei punti fissi. Si determini esplicitamente l'equazione delle linee di fase.

Soluzione: l'equazione è  $\dot{N} = -N/\tau$  con  $\tau \geq 0$ .

**Esercizio 3.5.10.** Il numero di isotopi radioattivi in un reattore decade con tasso proporzionale al numero di individui e ha un termine di crescita con tasso costante  $\lambda > 0$ . Si scriva l'equazione del modello. Si determinino i punti fissi. Si disegni il ritratto di fase nel piano delle fasi esteso e si studino euristicamente le proprietà di stabilità dei punti fissi. Si determini esplicitamente l'equazione delle linee di fase.

Soluzione: l'equazione è  $\dot{N} = \lambda - N/\tau$  con  $\tau \geq 0$ .

**Esercizio 3.5.11.** Si consideri la catena radioattiva  $A \rightarrow B \rightarrow C$  e si supponga che il primo decadimento abbia tasso  $1/\alpha$  e il secondo tasso  $1/\beta$ . Si scriva l'equazione che regola l'evoluzione della specie  $B$ . L'equazione risulta non autonoma; se ne determi la soluzione. Si disegni il grafico della soluzione nella caso della catena



sapendo che i rate di decadimento sono  $\tau_U = 2.48 \times 10^5$  anni e  $\tau_{Th} = 8.0 \times 10^3$  anni.

Soluzione: l'equazione è  $\dot{N}_B = (N_{A0}/\alpha) \exp\{-t/\alpha\} - N_B/\beta$ .

**Esercizio 3.5.12.** Si determini l'equazione differenziale che regola l'evoluzione della velocità di un corpo in caduta libera in un fluido viscoso. Si determinino i punti fissi. Si disegni il ritratto di fase nel piano delle fasi esteso e si studino euristicamente le proprietà di stabilità dei punti fissi. Si determini esplicitamente l'equazione delle linee di fase.

Soluzione: l'equazione è  $m\dot{v} = mg - kv$  con  $k, m, g \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.5.13.** Un fascio di raggi  $X$  di intensità (energia per unità di tempo e di superficie)  $I_0$  penetra in un metallo. Si suppone che gli elettroni in banda di conduzione abbiano densità  $n$  e che ciascun elettrone diffonda il fascio con sezione d'urto  $\sigma$  (potenzia irradiata diviso intensità incidente). Si determini l'equazione differenziale che regola la densità  $I(x)$  del fascio che ha percorso la distanza  $x$  nel mezzo. Si determinino i punti fissi. Si disegni il ritratto di fase nel piano delle fasi esteso e si studino euristicamente le proprietà di stabilità dei punti fissi. Si determini esplicitamente l'equazione delle linee di fase.

Soluzione: l'equazione è  $dI/dx = -n\sigma I$ , la costante  $n\sigma$  è detta coefficiente lineari di scattering del gas di elettroni.

### 3.6. Sistemi dinamici planari e moti unidimensionali.

Un sistema dinamico planare è un'equazione differenziale nella forma

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.21)$$

dove  $x \in \mathbb{R}^2$  e  $f(x)$  è un campo vettoriale  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Sotto opportune ipotesi di regolarità per il campo vettoriale  $f$  la soluzione dell'equazione (3.21) con dato iniziale  $x(0) = x^0$  esiste ed è unica. Ingredienti basilari e notazione:

- con  $x(t) = \varphi(t, x^0)$  si denota l'unica soluzione dell'equazione (3.21) con dato iniziale  $x^0$ . Tale soluzione verrà chiamata *traiettoria* o *orbita* uscente dal punto  $x^0$ .
- Un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  tale che  $f(x_0) = 0$  è detto punto di *equilibrio* (*critico*) per il sistema dinamico (3.21). Per i concetti relativi alla *stabilità* di un punto critico si rimanda al paragrafo 1.4 in [8]. Negli esercizi verrà usata la tecnica della linearizzazione ed il Teorema di Lijapunov.
- Una costante del moto per il sistema (3.21) è una funzione  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\dot{H}(\varphi(t, x^0)) = \langle \nabla H(\varphi(t, x^0)), f(\varphi(t, x^0)) \rangle = 0$$

lungo ogni possibile traiettoria  $\varphi(t, x^0)$ , ovvero per ogni dato iniziale  $x^0$ .

- Se  $H(x)$  è una costante del moto allora le curve regolari  $H(x) = \text{cost}$ , ottenute al variare della costante al secondo membro, sono dette *curve di livello*. Le traiettorie giacciono sulle curve di livello.

Si consideri, ora, un sistema meccanico unidimensionale costituito da una palla di massa  $m$  sottoposta all'azione della forza  $f(x)$ , con  $x$  la posizione della particella. Il moto è descritto dall'equazione di Newton

$$m\ddot{x} = f(x) \quad (3.22)$$

Se la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è di classe  $C^1$ , allora dati  $x^0, \dot{x}^0 \in \mathbb{R}$  esiste ed è unica la soluzione  $x(t)$  della (3.22) con dato iniziale  $x(0) = x^0$  e  $\dot{x}(0) = \dot{x}^0$ . La soluzione  $x(t)$  dell'equazione del moto è detta *legge oraria*. Il problema (3.22) può essere ricondotto allo studio di un sistema dinamico (3.21) per mezzo delle nuove variabili  $q := x$  e  $p := m\dot{x}$ . D'altro canto è possibile lo studio qualitativo diretto delle soluzioni della (3.22), ovvero del moto della particella, per mezzo del *principio di conservazione dell'energia*. Ingredienti e notazione:

- si definisce *energia potenziale* la funzione  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  tale che  $f(x) = -dV(x)/dx$ . I minimi ed i massimi di  $V(x)$  sono punti di equilibrio rispettivamente stabili ed instabili.
- Si verifica che l'*energia totale* della particella  $H(x, \dot{x}) := m\dot{x}^2/2 + V(x)$  è una costante del moto, ovvero  $dH(x, \dot{x})/dt = 0$ . Il principio di conservazione dell'energia si esprime scrivendo

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E \quad (3.23)$$

ove  $E$  è una costante reale.

- Se  $x(t)$  è la soluzione dell'equazione di Newton allora la curva nello spazio  $x-\dot{x}$  (spazio delle fasi) di equazioni parametriche  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$  è detta *orbita* del moto. Dal principio di conservazione dell'energia si deduce che le orbite giacciono necessariamente sulle curve di livello  $\Gamma_E := \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : \dot{x}^2/2 + V(x) = E\}$ , ove  $E \in \mathbb{R}$  è un valore costante dell'energia.
- Si consideri il moto corrispondente ad un valore  $E \in \mathbb{R}$  dell'energia. Dalla (3.23) si ha che i punti accessibili al moto sono tutti e soli i punti nell'insieme  $\mathcal{I}_E := \{x \in \mathbb{R} : E - V(x) \geq 0\}$ .

**Esercizio 3.6.2.** Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine che descrive il moto armonico semplice di una palla di massa  $m$  sottoposta all'azione di una molla di costante elastica  $\kappa$ :

$$m\ddot{z} + \kappa z = 0 \quad (3.24)$$

con  $m, \kappa \in \mathbb{R}$  e  $m, \kappa > 0$ . Si risponda ai seguenti quesiti: 1. si riconduca la (3.24) ad un sistema dinamico planare. 2. Si determini una costante del moto. 3. Si determinino i punti di equilibrio e 4. se ne studi la loro stabilità. 5. Si disegnino le curve di livello e si determini l'insieme  $\Pi$  dei dati iniziali che danno luogo ad orbite periodiche. 6. Si consideri un valore della costante del moto in corrispondenza del quale il moto è periodico e si calcoli il periodo dell'orbita.

Soluzione: 1. l'equazione (3.24) può essere scritta nella forma (3.21) introducendo le due nuove variabili:  $q = z$  e  $p = m\dot{z}$ , rispettivamente la posizione e l'impulso della palla. Infatti

$$\begin{cases} q = z \\ p = m\dot{z} \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{q} = \dot{z} \\ \dot{p} = m\ddot{z} = -\kappa z \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{q} = p/m \\ \dot{p} = -\kappa q \end{cases} \quad (3.25)$$

Il sistema (3.25) è un sistema dinamico nella forma (3.21) con  $x = (q, p) \in \mathbb{R}^2$  e  $f(q, p) = (p/m, -\kappa q)$ .

2. Se  $H(q, p)$  è una costante del moto allora

$$\dot{H}(q, p) = \langle \nabla H(q, p), f(q, p) \rangle = \frac{\partial H}{\partial q}(q, p)f_1(q, p) + \frac{\partial H}{\partial p}(q, p)f_2(q, p) = 0$$

Allora per determinare una costante del moto è sufficiente richiedere che  $H(q, p)$  soddisfi le due seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q}(q, p) = -f_2(q, p) = +\kappa q \\ \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) = f_1(q, p) = p/m \end{cases}$$

Dalla prima si ottiene  $H(q, p) = \kappa q^2/2 + \psi(p)$  con  $\psi(p)$  una funzione incognita nella sola variabile  $p$ ; sostituendo nella seconda si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{1}{m}p \implies \psi(p) = \frac{1}{2m}p^2 + \text{cost}$$

dove  $\text{cost}$  è una costante reale arbitraria. Scegliendo  $\text{cost} = 0$  si ottiene

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}\kappa q^2 \quad (3.26)$$

si noti che  $H(q, p)$  è l'energia totale della particella.

3. I punti di equilibrio soddisfano il sistema di equazioni  $f(q, p) = 0$ , ovvero

$$\begin{cases} f_1(q, p) = 0 \\ f_2(q, p) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} p/m = 0 \\ -\kappa q = 0 \end{cases} \implies P = (0, 0)$$

è l'unico punto di equilibrio.

4. Linearizzazione attorno a  $P$ : il sistema (3.25) è lineare. Può essere scritto nella forma  $\dot{x} = Ax$  con  $A$  la matrice  $2 \times 2$  reale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix}$$

Scrivo l'equazione secolare e determino gli autovalori della matrice  $A$ :

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1/m \\ -\kappa & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{\kappa}{m} = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

Gli autovalori di  $A$  sono complessi coniugati con parte reale nulla. Non si può dire nulla sulla stabilità di  $P$ .

Seconda strategia: il punto  $P$  è estrema per la funzione  $H(q, p)$ . Ne studio le proprietà: scrivo la matrice Hessiana  $\mathcal{H}(q, p)$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = -\frac{\partial f_2}{\partial q} = \kappa \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} = \frac{\partial f_1}{\partial p} = \frac{1}{m} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0$$

pertanto:

$$\mathcal{H}(q, p) = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix}$$

Inoltre  $\det(\mathcal{H}(0, 0)) = \kappa/m > 0$  e  $\mathcal{H}_{1,1}(0, 0) = \kappa > 0$  implicano che  $P$  è un punto di minimo per la funzione  $H(q, p)$ . Si dimostra che la funzione  $W(q, p) = H(q, p) - H(0, 0)$  è una funzione di Lijapunov, quindi usando il Teorema di Lijapunov si conclude che  $P$  è un punto di equilibrio stabile.

5. In primo luogo osservo che  $H(0, 0) = 0$ . Fissato un numero reale  $E > 0$  la curva di livello con energia  $E$  ha equazione

$$\frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}\kappa q^2 = E \quad (3.27)$$

Per ogni  $E > 0$  la curva di livello è un'ellisse centrata nell'origine (si veda la Fig. 3.3). Per  $E < 0$  non si hanno curve di livello. Per  $E = 0$  la curva di livello coincide con il punto di equilibrio stabile. Orbite periodiche: per ogni valore di  $E > 0$  la corrispondente curva di livello è una curva chiusa e regolare. Su di essa giace un'orbita periodica. Pertanto l'insieme dei dati iniziali che danno luogo ad orbite periodiche è  $\Pi = \mathbb{R} \setminus \{P\}$ .

6. Si consideri  $E > 0$ . Lungo l'orbita con energia  $E$  si ha  $p = \pm \sqrt{m(2E - \kappa q^2)}$ . Per ragioni di simmetria il periodo  $T$  è dato dal doppio del tempo impiegato a percorrere l'arco superiore della traiettoria di equazione  $p = \sqrt{m(2E - \kappa q^2)}$ . Il punto iniziale è  $(-\sqrt{2E/\kappa}, 0)$ , mentre quello finale è  $(\sqrt{2E/\kappa}, 0)$ . Usando la prima delle (3.25) si ha

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{m}p = \sqrt{\frac{2E - \kappa q^2}{m}} \implies \int_0^{T/2} dt = \int_{-\sqrt{2E/\kappa}}^{\sqrt{2E/\kappa}} \frac{dq}{\sqrt{(2E - \kappa q^2)/m}} = 2 \int_0^{\sqrt{2E/\kappa}} \frac{dq}{\sqrt{(2E - \kappa q^2)/m}}$$

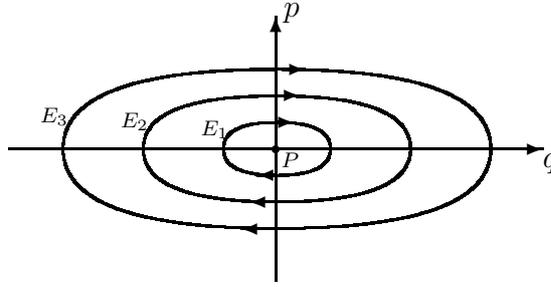


Fig. 3.3. Curve di livello per il moto armonico semplice.  $P = (0, 0)$  è un punto di equilibrio stabile.  $H(P) = 0$  e  $E_3 > E_2 > E_1 > 0$ .

Eseguito la sostituzione  $q = \sqrt{2E/\kappa} \sin \varphi$  si ottiene

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{4m}{\kappa}} \int_0^{\pi/2} d\varphi \implies T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\kappa}}$$

Si osservi che il periodo è indipendente da  $E$ . Si confronti questo risultato con il risultato dell'Esercizio 3.3.9.

**Esercizio 3.6.3.** Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine che descrive il moto di una palla di massa  $m$  sottoposta all'azione di una forza derivante dal potenziale quartico  $V(x) = -ax^2 + bx^4$ , con  $a, b > 0$ . Il moto è descritto dall'equazione di Newton:

$$m\ddot{z} + \frac{dV}{dz} = 0 \quad (3.28)$$

Si risponda ai seguenti quesiti: 1. si riconduca la (3.28) ad un sistema dinamico planare. 2. Si determini una costante del moto. 3. Si determinino i punti di equilibrio e 4. se ne studi la loro stabilità. 5. Si disegnino le curve di livello e si determini l'insieme  $\Pi$  dei dati iniziali che danno luogo ad orbite periodiche. 6. Si scriva come integrale definito il periodo dell'orbita con dato iniziale  $x^0 = (\sqrt{a/4b}, 0)$ .

Soluzione: 1. l'equazione (3.28) può essere scritta nella forma (3.21) introducendo le due nuove variabili:  $q = z$  e  $p = m\dot{z}$ , rispettivamente la posizione e l'impulso della palla. Infatti

$$\begin{cases} q = z \\ p = m\dot{z} \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{q} = \dot{z} \\ \dot{p} = m\ddot{z} = -\frac{dV}{dz} = +2aq - 4bq^3 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{q} = p/m \\ \dot{p} = +2aq - 4bq^3 \end{cases} \quad (3.29)$$

Il sistema (3.29) è un sistema dinamico nella forma (3.21) con  $x = (q, p) \in \mathbb{R}^2$  e  $f(q, p) = (p/m, 2aq - 4bq^3)$ .

2. Se  $H(q, p)$  è una costante del moto allora

$$\dot{H}(q, p) = \langle \nabla H(q, p), f(q, p) \rangle = \frac{\partial H}{\partial q}(q, p)f_1(q, p) + \frac{\partial H}{\partial p}(q, p)f_2(q, p) = 0$$

Allora per determinare una costante del moto è sufficiente richiedere che  $H(q, p)$  soddisfi le due seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q}(q, p) = -f_2(q, p) = -2aq + 4bq^3 \\ \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) = f_1(q, p) = p/m \end{cases}$$

Dalla prima si ottiene  $H(q, p) = -aq^2 + bq^4 + \psi(p)$  con  $\psi(p)$  una funzione incognita nella sola variabile  $p$ . Sostituendo nella seconda delle precedenti si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{1}{m}p \implies \psi(p) = \frac{1}{2m}p^2 + \text{cost}$$

dove cost è una costante reale arbitraria. Scegliendo cost = 0 si ottiene

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 - aq^2 + bq^4 \quad (3.30)$$

si noti che  $H(q, p)$  è l'energia totale della particella.

3. I punti di equilibrio soddisfano il sistema di equazioni  $f(q, p) = 0$ , ovvero

$$\begin{cases} f_1(q, p) = 0 \\ f_2(q, p) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} p/m = 0 \\ 2aq - 4bq^3 = 0 \end{cases} \implies P_1 = (0, 0), P_2 = \left(\sqrt{\frac{a}{2b}}, 0\right), P_3 = \left(-\sqrt{\frac{a}{2b}}, 0\right)$$

sono i tre punti di equilibrio.

4. Linearizzazione attorno ai punti critici: dato  $\hat{x} = (\hat{q}, \hat{p})$  il sistema (3.29) può essere scritto nella forma  $\dot{x} = A(x - \hat{x}) + Q(x - \hat{x})$  con  $A$  la matrice  $2 \times 2$  reale

$$A(\hat{q}, \hat{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q}(\hat{q}, \hat{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial p}(\hat{q}, \hat{p}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial q}(\hat{q}, \hat{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial p}(\hat{q}, \hat{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ 2a - 12b\hat{q}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Scrivo l'equazione secolare e determino gli autovalori della matrice  $A(\hat{x})$ :

$$\det(A(\hat{x}) - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1/m \\ 2a - 12b\hat{q}^2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{2a - 12b\hat{q}^2}{m} = 0 \implies \lambda_{1,2}(\hat{x}) = \pm \sqrt{\frac{2a - 12b\hat{q}^2}{m}}$$

A questo punto posso studiare la stabilità dei tre punti critici  $P_1, P_2$  e  $P_3$ :

- $\lambda_{1,2}(P_1) = \pm \sqrt{2a/m}$ , esiste almeno un autovalore reale e positivo, quindi  $P_1$  è un punto di equilibrio instabile.
- $\lambda_{1,2}(P_2) = \pm 2i\sqrt{a/m}$ , gli autovalori hanno parte reale zero, quindi non si può dire nulla sulla stabilità di  $P_2$ .
- $\lambda_{1,2}(P_3) = \pm 2i\sqrt{a/m}$ , gli autovalori hanno parte reale zero, quindi non si può dire nulla sulla stabilità di  $P_3$ .

Seconda strategia: i punti  $P_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ , sono estremali per la funzione  $H(q, p)$ . Ne studio le proprietà: scrivo la matrice Hessiana  $\mathcal{H}(q, p)$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = -\frac{\partial f_2}{\partial q} = -2a + 12bq^2 \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} = \frac{\partial f_1}{\partial p} = \frac{1}{m} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0$$

pertanto:

$$\mathcal{H}(q, p) = \begin{pmatrix} -2a + 12bq^2 & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det(\mathcal{H}(q, p)) = \frac{12bq^2 - 2a}{m}$$

Osservo che  $\det(\mathcal{H}(P_{2,3})) = 4a/m > 0$  e  $\mathcal{H}_{1,1}(P_{2,3}) = 4a > 0$ :  $P_{2,3}$  sono punti di minimo per la funzione  $H(q, p)$ . Si dimostra che la funzione  $W(q, p) = H(q, p) - H(P_{2,3})$  è una funzione di Lijapunov per  $P_2$  e per  $P_3$ , quindi usando il Teorema di Lijapunov si conclude che  $P_{2,3}$  sono punti di equilibrio stabile.

5. In primo luogo osservo che  $H(q, p)$  è funzione pari sia in  $q$  che in  $p$ , quindi mi limito a studiarne le curve di livello nel quadrante  $q, p \geq 0$  (I quadrante); negli altri quadranti le curve verranno ottenute per simmetria. Osservo, inoltre, che  $P_1$  è punto di equilibrio instabile e che  $H_1 := H(P_1) = 0$ : le curve di livello più interessanti sono quelle passanti per i punti critici instabili quindi

- considero la curva di livello  $\Gamma_{H_1} := \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : H(q, p) = H_1\}$ . Nel quadrante  $q, p \geq 0$  l'equazione di tale curva è  $p = q\sqrt{2m(a - bq^2)}$ . La curva interseca l'asse  $p = 0$  in  $q = 0$  e  $q = \sqrt{a/b}$ , non è definita all'esterno dell'intervallo  $[0, \sqrt{a/b}]$  ed è regolare in  $(0, \sqrt{a/b})$  (si veda la Fig. 3.4). Su  $\Gamma_{H_1}$  giacciono tre orbite: due asintotiche a  $P_1$  ed una coincidente con il punto di equilibrio instabile  $x(t) = (0, 0)$ .
- Osservo che  $H(q, p)$  è nulla su  $\Gamma_{H_1}$  e che  $H(P_2) = H(P_3) = -a^2/4b < 0$ , quindi per la continuità della costante del moto  $H(q, p)$  le curve di livello relative ad energie negative si troveranno tutte all'interno di  $\Gamma_{H_1}$ , mentre quelle relative ad energie positive si troveranno tutte all'esterno.
- Considero  $E \in \mathbb{R}$  tale che  $-a^2/4b < E < 0$ : le regioni contenute all'interno di  $\Gamma_{H_1}$  contengono ciascuna un solo punto di equilibrio stabile, quindi le curve di livello relative a valori negativi dell'energia sono curve chiuse, regolari che ruotano attorno al relativo punto di equilibrio stabile (Teorema 4.37 in [8]). Su ciascuna componente connessa di ogni curva di livello giace un'orbita periodica attorno al relativo punto di equilibrio stabile.
- Sia  $E > 0$ : le curve di livello  $H(q, p) = E$  le disegno per continuità.
- I versi sulle curve di livello vengono determinati osservando che  $\dot{q} = p/m$  è positivo nel semipiano  $p > 0$  e negativo in quello  $p < 0$ .

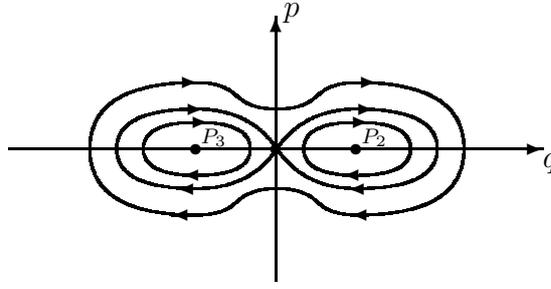


Fig. 3.4. Curve di livello per il potenziale quartico.

Dalla discussione precedente si ha che l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche è tutto lo spazio delle fasi ad eccezione dei punti di equilibrio e dei punti della curva di livello con energia zero; ovvero  $\Pi = \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_{H_1} \cup \{P_2, P_3\})$ .

6. Si consideri l'orbita generata dal dato iniziale  $x^0 = (\sqrt{a/4b}, 0)$ . Poiché  $\sqrt{a/4b} < \sqrt{a/2b} < \sqrt{a/b}$  il punto  $x^0$  si trova all'interno della regione delimitata dalla curva di livello passante per l'origine, quindi esso origina un'orbita periodica. Alternativamente si può osservare che  $H(x^0) = -3a^2/16b > H(P_2) = -a^2/4b$  implica  $x^0 \in \Pi$ . Determino i punti di inversione dell'orbita periodica risolvendo l'equazione  $H(q, 0) = -3a^2/16b$ . Oltre all'ovvia soluzione  $q^0 = \sqrt{a/4b}$  si trova  $q^1 = \sqrt{3a/4b}$ . Pertanto, osservato che  $H(q, p) = -3a^2/16b$  implica  $p = \sqrt{2m[-bq^4 + aq^2 - 3a^2/16b]}$  si ha

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{m}p = \sqrt{2m \left[ -bq^4 + aq^2 - \frac{3a^2}{16b} \right]} \implies \int_0^{T/2} dt = \int_{\sqrt{a/4b}}^{\sqrt{3a/4b}} \frac{1}{\sqrt{2m \left[ -bq^4 + aq^2 - \frac{3a^2}{16b} \right]}}$$

e quindi

$$T = 2 \int_{\sqrt{a/4b}}^{\sqrt{3a/4b}} \frac{1}{\sqrt{2m \left[ -bq^4 + aq^2 - \frac{3a^2}{16b} \right]}}$$

**Esercizio 3.6.4.** Si consideri il sistema dinamico

$$\dot{z} = f(z) \quad \text{con} \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad f(z) = (2y - (x^2 - 1)^2 - 1, 4x(x^2 - 1)(y - 1)) \quad (3.31)$$

Si risponda ai seguenti quesiti: 1. si determini una costante del moto. 2. Si determinino i punti di equilibrio e 3. se ne studi la loro stabilità. 4. Si disegnino le curve di livello e si determini l'insieme  $\Pi$  dei dati iniziali che danno luogo ad orbite periodiche. 5. Si dimostri che l'orbita generata dal dato iniziale  $z_0 = (1, 3/4)$  è periodica e se ne scriva il periodo in forma di integrale definito. 6. Si trovi esplicitamente la soluzione con dato iniziale  $z_0 = (1, 1)$  e se ne discuta il comportamento asintotico.

Soluzione: 1. Se  $H(x, y)$  è una costante del moto allora

$$\dot{H}(x, y) = \langle \nabla H(x, y), f(x, y) \rangle = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y)f_1(x, y) + \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)f_2(x, y) = 0$$

Allora per determinare una costante del moto è sufficiente richiedere che  $H(x, y)$  soddisfi le due seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -f_2(x, y) = -4x(x^2 - 1)(y - 1) \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = f_1(x, y) = 2y - (x^2 - 1)^2 - 1 \end{cases}$$

Dalla seconda si ottiene  $H(x, y) = y^2 - [(x^2 - 1)^2 + 1]y + \psi(x)$  con  $\psi(x)$  una funzione incognita nella sola variabile  $x$ . Sostituendo nella seconda delle precedenti si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 4x(x^2 - 1)(y - y + 1) = 4x^3 - 4x \implies \psi(x) = x^4 - 2x^2 + \text{cost}$$

dove  $\text{cost}$  è una costante reale arbitraria. Scegliendo  $\text{cost} = 0$  si ottiene

$$H(x, y) = y^2 - [(x^2 - 1)^2 + 1]y + x^2(x^2 - 2) \quad (3.32)$$

2. I punti di equilibrio soddisfano il sistema di equazioni  $f(x, y) = 0$ , ovvero

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2y - (x^2 - 1)^2 - 1 = 0 \\ 4x(x^2 - 1)(y - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\implies P_1 = (0, 1), P_2 = (1, 1/2), P_3 = (-1, 1/2), P_4 = (\sqrt{2}, 1), P_5 = (-\sqrt{2}, 1)$$

sono i cinque punti di equilibrio.

3. Linearizzazione attorno ai punti critici: dato  $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y})$  il sistema (3.31) può essere scritto nella forma  $\dot{z} = A(z - \hat{z}) + Q(z - \hat{z})$  con  $A$  la matrice  $2 \times 2$  reale

$$A(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4(\hat{x}^2 - 1)\hat{x} & 2 \\ 4(\hat{y} - 1)(3\hat{x}^2 - 1) & 4\hat{x}(\hat{x}^2 - 1) \end{pmatrix}$$

Scrivo l'equazione secolare e determino gli autovalori della matrice  $A(\hat{z})$ :

$$\begin{aligned} \det(A(\hat{z}) - \lambda \mathbb{I}) &= \det \begin{pmatrix} -4\hat{x}(\hat{x}^2) - \lambda & 2 \\ 4(\hat{y} - 1)(3\hat{x}^2 - 1) & 4\hat{x}(\hat{x}^2 - 1) - \lambda \end{pmatrix} = -16\hat{x}^2(\hat{x}^2 - 1)^2 + \lambda^2 - 8(\hat{y} - 1)(3\hat{x}^2 - 1) = 0 \\ &\implies \lambda_{1,2}(\hat{z}) = \pm \sqrt{16\hat{x}^2(\hat{x}^2 - 1)^2 + 8(\hat{y} - 1)(3\hat{x}^2 - 1)} \end{aligned}$$

A questo punto posso studiare la stabilità dei punti critici:

- $\lambda_{1,2}(P_1) = 0$ , gli autovalori sono nulli, quindi non si può dire nulla sulla stabilità di  $P_1$ .
- $\lambda_{1,2}(P_{2,3}) = \pm 2i\sqrt{2}$ , gli autovalori hanno parte reale zero, quindi non si può dire nulla sulla stabilità di  $P_2$  e di  $P_3$ .
- $\lambda_{1,2}(P_{4,5}) = \pm 4\sqrt{2}$ , gli autovalori sono reali e distinti; ne esiste uno positivo, quindi  $P_4$  e  $P_5$  sono punti di equilibrio instabile.

Seconda strategia: i punti  $P_i$ , con  $i = 1, \dots, 5$ , sono estremali per la funzione  $H(x, y)$ . Ne studio le proprietà: scrivo la matrice Hessiana  $\mathcal{H}(x, y)$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} = -4(y - 1)(3x^2 - 1) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2 \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = 0$$

pertanto:

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} -4(y - 1)(3x^2 - 1) & -4x(x^2 - 1) \\ -4x(x^2 - 1) & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det(\mathcal{H}(x, y)) = -8(y - 1)(3x^2 - 1) - 16x^2(x^2 - 1)^2$$

Osservo che  $\det(\mathcal{H}(P_{2,3})) = 8 > 0$  e  $\mathcal{H}_{1,1}(P_{2,3}) = 4 > 0$ :  $P_{2,3}$  sono punti di minimo per la funzione  $H(x, y)$ . Si dimostra che la funzione  $W(x, y) := H(x, y) - H(P_{2,3})$  è una funzione di Lijapunov per  $P_2$  e per  $P_3$ , quindi usando il Teorema di Lijapunov si conclude che  $P_{2,3}$  sono punti di equilibrio stabile. Sul punto  $P_1$  non si può, invece, dire nulla perché  $\det(\mathcal{H}(P_1)) = 0$ , ma dallo studi delle curve di livello emergerà che si tratta di un punto di equilibrio instabile.

4. In primo luogo osservo che  $H(x, y)$  è una funzione pari nella variabile  $x$ , quindi le curve di livello avranno l'asse  $y$  per asse di simmetria. Inoltre  $H(P_1) = H(P_4) = H(P_5) = -1$ ,  $P_4$  e  $P_5$  sono punti instabili, le curve di livello più interessanti sono quelle passanti per i punti critici instabili, quindi

- considero la curva di livello  $\Gamma_{-1} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = -1\}$ . In forma implicita l'equazione di tale curva è:

$$\begin{aligned} y^2 - [(x^2 - 1)^2 + 1]y + x^2(x^2 - 2) + 1 = 0 &\implies y^2 - y - (x^2 - 1)^2y + (x^2 - 1)^2 = 0 \\ &\implies y(y - 1) - (y - 1)(x^2 - 1)^2 = 0 \implies (y - 1)[y - (x^2 - 1)^2] = 0 \end{aligned}$$

quindi la curva di livello  $\Gamma_{-1}$  è costituita dalle due curve  $y = 1$  e  $y = (x^2 - 1)^2$  (si veda la Fig. 3.5). Su  $\Gamma_{-1}$  giacciono undici orbite: otto orbite asintotiche ai punti di equilibrio instabili e tre punti di equilibrio instabili.

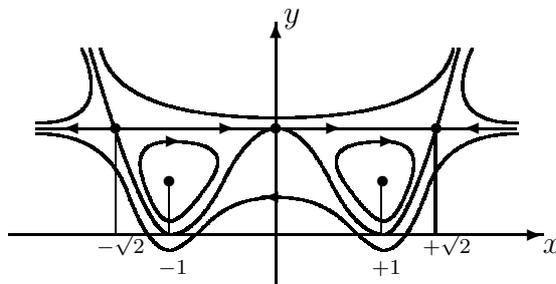


Fig. 3.5. Curve di livello per il sistema dinamico (3.31). I versi non indicati si deducono per continuità.

- Osservo che  $H(x, y) = -1$  su  $\Gamma_{H_1}$  e che  $H(P_2) = H(P_3) = -5/2 < -1$ , quindi per la continuità della costante del moto  $H(x, y)$  le curve di livello relative ad energie nell'intervallo  $[-5/2, -1]$  si troveranno tutte all'interno di  $\Gamma_{-1}$ , mentre quelle relative ad energie maggiori di  $-1$  si troveranno tutte all'esterno. Più precisamente: definisco i due insiemi  $D_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \sqrt{2}, (x^2 - 1)^2 < y < 1\}$  e  $D_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{2} < x < 0, (x^2 - 1)^2 < y < 1\}$ . Allora le curve di livello con energia in  $[-5/2, -1]$  si trovano in  $D_2 \cup D_3$ , mentre quelle relative ad energie maggiori di  $-1$  si trovano in  $\mathbb{R}^2 \setminus (D_2 \cup D_3 \cup \Gamma_{-1})$ .
- Considero  $E \in \mathbb{R}$  tale che  $-5/2 < E < -1$ :  $D_2$  e  $D_3$  contengono ciascuna un solo punto di equilibrio stabile, quindi le curve di livello relative a valori negativi dell'energia sono curve chiuse, regolari che ruotano attorno al relativo punto di equilibrio stabile (Teorema 4.37 in [8]). Su ciascuna componente connessa di ogni curva di livello giace un'orbita periodica attorno al relativo punto di equilibrio stabile (si veda la Fig. 3.5).
- Sia  $E > -1$ : le curve di livello  $H(x, y) = E$  le disegno per continuità. Queste curve di livello sono aperte, su ognuna di esse giace un'orbita asintotica all'infinito.
- I versi su  $\Gamma_{-1}$  vengono determinati osservando che 1. su un tratto di curva di livello che non interseca alcun punto di equilibrio il verso non cambia, 2.  $f_1(1, 1) = 1 > 0$ ,  $f_1(1, 0) = -1 < 0$ ,  $f_1(2, 1) = -8 < 0$  e  $f_1(2, 9) = 7 > 0$ . Sulle altre curve di livello i versi possono essere trovati per continuità.

Dalla discussione precedente si ha che l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche è  $\Pi = D_2 \cup D_3$ .

5. Si consideri l'orbita generata dal dato iniziale  $z_0 = (1, 3/4)$ . Osservo che  $z_0 \in D_2$  implica che l'orbita generata da  $z_0$  è periodica. Per poter scrivere il periodo dell'orbita è necessario scrivere l'equazione della curva di livello in forma esplicita, cioè devo ricavare la  $y$  in funzione della  $x$  o viceversa:

$$H(x, y) = H(z_0) \implies y^2 - [(x^2 - 1)^2 + 1]y + x^2(x^2 - 1) = -\frac{19}{16} \implies$$

$$y^2 - [(x^2 - 1)^2 + 1]y + x^2(x^2 - 1) + 1 = -\frac{3}{16} \implies (y - 1)[y - (x^2 - 1)^2] = -\frac{3}{16} \implies (x^2 - 1)^2 = y + \frac{3}{16(y - 1)}$$

Dalla precedente si può ricavare la variabile  $x$  in funzione della variabile  $y$  semplicemente eseguendo delle radici quadrate. Bisogna, però controllare che i radicandi siano positivi: il secondo membro è positivo se e solo se  $16y^2 - 16y + 3 \leq 0$ , ovvero se  $1/4 \leq y \leq 3/4$ . Da questa osservazione si deduce che l'orbita è compresa tra le due rette  $y = 1/4$  e  $y = 3/4$  e le tocca nei punti  $z_0 = (1, 3/4)$  e  $z_1 = (1, 1/4)$ . Quindi per i valori di  $y$  permessi si ha:

$$x^2 - 1 = \pm \sqrt{y + \frac{3}{16(y - 1)}}$$

La scelta del segno va fatta osservando che  $x$  può essere maggiore o minore di 1. Nel primo caso va scelto il segno  $+$  mentre nel secondo va scelto il segno  $-$ , perché il primo membro è rispettivamente positivo e negativo nei due casi. Quindi l'equazione della traiettoria diventa:

$$x^2 = \begin{cases} 1 + \sqrt{y + \frac{3}{16(y - 1)}} & \text{se } x > 1 \\ 1 - \sqrt{y + \frac{3}{16(y - 1)}} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Infine, dopo aver osservato che nelle due espressioni precedenti il membro di destra è positivo e che l'orbita giace nel semipiano  $x > 0$ , si può scrivere l'equazione dell'orbita in forma esplicita:

$$x(y) = \begin{cases} \sqrt{1 + \sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}}} & \text{se } x > 1 \\ \sqrt{1 - \sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}}} & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad (3.33)$$

Il periodo dell'orbita può essere calcolato osservando che dalle equazioni (3.31) si ha

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \implies \frac{dy}{4x(y)(x^2(y) - 1)(y - 1)} = dt$$

ove  $x = x(y)$  è l'equazione (3.33). Per integrare la precedente si definisce  $t_1$  l'istante in cui l'orbita raggiunge  $z_1$  e si osserva che in  $t_1$  l'espressione esplicita della funzione  $x(y)$  cambia. Quindi:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^T dt = \int_0^{t_1} dt + \int_{t_1}^T dt = \int_{3/4}^{1/4} \frac{dy}{4x(y)(x^2(y) - 1)(y - 1)} + \int_{1/4}^{3/4} \frac{dy}{4x(y)(x^2(y) - 1)(y - 1)} \\ \implies T &= \int_{3/4}^{1/4} \frac{dy}{4\sqrt{1 + \sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}}}\sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}}(y - 1)} - \int_{1/4}^{3/4} \frac{dy}{4\sqrt{1 - \sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}}}\sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}}(y - 1)} \end{aligned}$$

6. Il punto  $z_0 = (1, 1)$  si trova sul tratto  $y = 1$  della curva di livello  $\Gamma_{-1}$ . Allora l'orbita sarà tale che  $y(t) = 1$ . Sostituendo nel sistema dinamico di partenza si ottiene  $\dot{x} = 1 - (x^2 - 1)^2$  che può essere integrata e fornisce la legge oraria. Infatti

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = 1 - (x^2 - 1)^2 &\implies dt = \frac{dx}{x^2(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)} \implies \int_0^t dt' = \int_1^{x(t)} \frac{dx}{x^2(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)} \\ &\implies t = \int_1^{x(t)} dx \left\{ \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4\sqrt{2}(\sqrt{2} - x)} + \frac{1}{4\sqrt{2}(\sqrt{2} + x)} \right\} \\ &\implies t = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2x(t)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2} + x(t)}{\sqrt{2} - x(t)} \end{aligned}$$

Pur non sapendo invertire la legge oraria è possibile controllare il comportamento all'infinito: basta osservare che per  $x \rightarrow \sqrt{2}$  il tempo  $t$  tende a  $+\infty$ , mentre per  $x \rightarrow 0$  si ha  $t \rightarrow -\infty$ .

**Esercizio 3.6.5.** Si consideri il problema di un pendolo di massa  $m = 1$  e lunghezza  $\ell = 1$  oscillante in un piano vincolato a ruotare con velocità angolare costante  $\omega > 0$  attorno ad un asse. Il moto è descritto dall'equazione di Newton:

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta \quad (3.34)$$

ove  $\theta$  è l'angolo tra il pendolo e l'asse di rotazione. Si risponda ai seguenti quesiti: 1. si riconduca la (3.34) ad un sistema dinamico planare. 2. Si determini una costante del moto. 3. Si determinino i punti di equilibrio e 4. se ne studi la loro stabilità. 5. Si disegnino le curve di livello e si determini l'insieme dei dati iniziali che danno luogo ad orbite periodiche. 6. Si studi il caso in cui venga introdotto una forza resistiva  $-\alpha\dot{\theta}$  con  $\alpha > 0$ . In particolare si determinino eventuali punti di equilibrio asintoticamente stabili e se ne stimi il bacino d'attrazione. Soluzione: studio il problema nell'intervallo  $\theta \in [0, \pi]$ . Per  $\theta < 0$  si ottengono gli stessi risultati perché l'equazione del moto è simmetrica nello scambio  $\theta \rightarrow -\theta$ .

1. l'equazione (3.34) può essere scritta nella forma (3.21) introducendo le due nuove variabili:  $q = \theta$  e  $p = \dot{\theta}$ . Infatti

$$\begin{cases} q = \theta \\ p = \dot{\theta} \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{q} = \dot{\theta} \\ \dot{p} = \ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \omega^2 \sin q \cos q - g \sin q \end{cases} \quad (3.35)$$

Il sistema (3.35) è un sistema dinamico nella forma (3.21) con  $x = (q, p) \in \mathbb{R}^2$  e  $f(q, p) = (p, \omega^2 \sin q \cos q - g \sin q)$ .

2. Se  $H(q, p)$  è una costante del moto allora

$$\dot{H}(q, p) = \langle \nabla H(q, p), f(q, p) \rangle = \frac{\partial H}{\partial q}(q, p)f_1(q, p) + \frac{\partial H}{\partial p}(q, p)f_2(q, p) = 0$$

Allora per determinare una costante del moto è sufficiente richiedere che  $H(q, p)$  soddisfi le due seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q}(q, p) = -f_2(q, p) = -\omega^2 \sin q \cos q + g \sin q \\ \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) = f_1(q, p) = p \end{cases}$$

Dalla prima si ottiene  $H(q, p) = -g \cos q + (\omega^2/4) \cos 2q + \psi(p)$  con  $\psi(p)$  una funzione incognita nella sola variabile  $p$ . Sostituendo nella seconda delle precedenti si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = p \implies \psi(p) = \frac{1}{2}p^2 + \text{cost}$$

dove  $\text{cost}$  è una costante reale arbitraria. Scegliendo  $\text{cost} = 0$  si ottiene

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 - g \cos q + \frac{\omega^2}{4} \cos 2q \quad (3.36)$$

si noti che  $H(q, p)$  è l'energia totale della particella.

3. I punti di equilibrio soddisfano il sistema di equazioni  $f(q, p) = 0$ , ovvero

$$\begin{cases} f_1(q, p) = 0 \\ f_2(q, p) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} p = 0 \\ \omega^2 \sin q \cos q - g \sin q = 0 \end{cases}$$

Per risolvere il sistema precedente bisogna distinguere due casi: definisco  $\rho := g/\omega^2$  ed osservo che nel caso  $\rho > 1$  (piccola forza centrifuga) esistono due soli punti di equilibrio:  $P_1 = (0, 0)$  e  $P_2 = (\pi, 0)$ . Nel caso  $\rho < 1$  (grande forza centrifuga) esiste un ulteriore punto di equilibrio  $P_3 = (\arcsin \rho, 0)$ .

4. Linearizzazione attorno ai punti critici: dato  $\hat{x} = (\hat{q}, \hat{p})$  il sistema (3.35) può essere scritto nella forma  $\dot{x} = A(x - \hat{x}) + Q(x - \hat{x})$  con  $A$  la matrice  $2 \times 2$  reale

$$A(\hat{q}, \hat{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q}(\hat{q}, \hat{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial p}(\hat{q}, \hat{p}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial q}(\hat{q}, \hat{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial p}(\hat{q}, \hat{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 (\cos 2\hat{q} - \rho \cos \hat{q}) & 0 \end{pmatrix}$$

Scrivo l'equazione secolare e determino gli autovalori della matrice  $A(\hat{x})$ :

$$\begin{aligned} \det(A(\hat{x}) - \lambda \mathbb{I}) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \omega^2 (\cos 2\hat{q} - \rho \cos \hat{q}) & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \omega^2 (\cos 2\hat{q} - \rho \cos \hat{q}) = 0 \\ \implies \lambda_{1,2}(\hat{x}) &= \pm \sqrt{\omega^2 (\cos 2\hat{q} - \rho \cos \hat{q})} = \pm \omega \sqrt{\cos 2\hat{q} - \rho \cos \hat{q}} \end{aligned}$$

A questo punto posso studiare la stabilità dei punti critici: in primo luogo osservo che

$$\lambda_{1,2}(P_1) = \pm \omega \sqrt{1 - \rho}, \quad \lambda_{1,2}(P_2) = \pm \omega \sqrt{1 + \rho} \quad \text{e} \quad \lambda_{1,2}(P_3) = \pm i \omega \sqrt{1 - \rho^2}$$

con l'ultimo autovalore che ha senso soltanto nel caso  $\rho < 1$ . Quindi

- se  $0 < \rho < 1$  allora  $P_1$  e  $P_2$  sono instabili, mentre su  $P_3$  non si può dire nulla.
- Se  $\rho \geq 1$  allora  $P_2$  è instabile, mentre su  $P_1$  non si può dire nulla.

Seconda strategia: i punti  $P_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ , sono estremali per la funzione  $H(q, p)$ . Ne studio le proprietà: scrivo la matrice Hessiana  $\mathcal{H}(q, p)$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = -\frac{\partial f_2}{\partial q} = -\omega^2 (\cos 2q - \rho \cos q) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} = \frac{\partial f_1}{\partial p} = 1 \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial q} = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0$$

pertanto:

$$\mathcal{H}(q, p) = \begin{pmatrix} -\omega^2 (\cos 2q - \rho \cos q) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det(\mathcal{H}(q, p)) = -\omega^2 (\cos 2q - \rho \cos q)$$

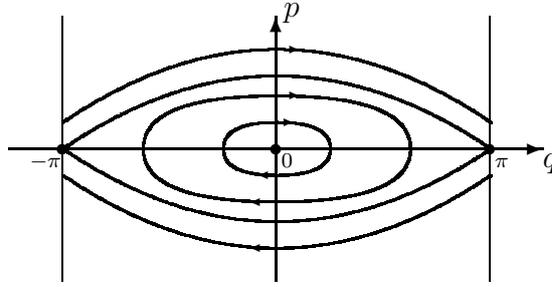


Fig. 3.6. Curve di livello per il pendolo rotante nel caso  $\rho \geq 1$ . I versi non indicati in figura si ottengono per continuità.

Osservo che nel caso  $\rho < 1$  si ha  $\det(\mathcal{H}(P_3)) = \mathcal{H}_{1,1}(P_3) = \omega^2(1 - \rho^2) > 0$ , allora  $P_3$  è punto di minimo per la funzione  $H(q, p)$ . Si dimostra che la funzione  $W(q, p) = H(q, p) - H(P_3)$  è una funzione di Lijapunov per  $P_3$ , quindi usando il Teorema di Lijapunov si conclude che  $P_3$  è punto di equilibrio stabile nel caso  $\rho < 1$ . Inoltre osservo che  $\det(\mathcal{H}(P_1)) = \mathcal{H}_{1,1}(P_1) = \omega^2(\rho - 1)$ , quindi si può concludere che nel caso  $\rho > 1$  il punto  $P_1$  è stabile. Nel caso  $\rho = 1$  non si può dire nulla perché  $\det(\mathcal{H}(P_1)) = \mathcal{H}_{1,1}(P_1) = 0$ , ma questo caso può essere discusso in modo diretto, infatti osservo che  $H(q, p) = p^2/2 + (\omega^2/4)(2 \cos^2 q - 4 \cos q - 1)$  e  $H(P_1) = -3\omega^2/4$ . Quindi,

$$H(q, p) - H(P_1) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2(2 \cos q - 1)^2 > 0 \quad \forall (q, p) \neq (0, 0)$$

Allora  $P_1$  è un punto di minimo per  $H(q, p)$  è quindi è un punto di equilibrio stabile. Riassumo quindi i risultati sulla stabilità:

- $\rho < 1$ :  $P_1$  e  $P_2$  instabili,  $P_3$  stabile.
- $\rho \geq 1$ :  $P_1$  stabile,  $P_2$  instabile.

5. Studio le curve di livello nel caso  $\rho = 1$ . Nel caso  $\rho > 1$  si ottengono dei risultati analoghi. Osservo che  $P_2$  è punto di equilibrio instabile e che  $H_2 := H(P_2) = 5\omega^2/4$ : le curve di livello più interessanti sono quelle passanti per i punti critici instabili quindi

- considero la curva di livello  $\Gamma_{H_2} := \{(q, p) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} : H(q, p) = H_2\}$ . Nel semipiano  $p > 0$  l'equazione di tale curva è  $p = \omega\sqrt{4 - (\cos q - 1)^2}$ . Per disegnare la curva è sufficiente osservare che in  $[0, \pi]$  la funzione  $4 - (\cos q - 1)^2$  decresce da 4 a 0: risulta, quindi, il grafico in Fig. 3.6 con le intersezioni con l'asse  $q = 0$  nei punti  $\pm 2\omega$ . Su  $\Gamma_{H_2}$  giacciono tre orbite: due asintotiche a  $P_2 \equiv -P_2$  ed una coincidente con il punto di equilibrio instabile  $P_2 \equiv -P_2$ .
- Osservo che  $H(P_2) = 5\omega^2/4 > H(P_1) = -3\omega^2/4 =: H_1$ ; quindi per la continuità della costante del moto  $H(q, p)$  le curve di livello relative ad energie comprese tra  $H_1$  e  $H_2$  si troveranno tutte all'interno di  $\Gamma_{H_2}$ , mentre quelle relative ad energie maggiori di  $H_2$  si troveranno tutte all'esterno.
- Considero un'energia  $H_1 < E < H_2$ : la regione contenuta all'interno di  $\Gamma_{H_2}$  contiene un solo punto di equilibrio stabile  $P_1$ , quindi le curve di livello sono curve chiuse e regolari che ruotano attorno a  $P_1$  (Teorema 4.37 in [8]). Su ciascuna curva di livello giace un'orbita periodica attorno al punto di equilibrio stabile.
- Sia  $E > H_2$ : le curve di livello  $H(q, p) = E$  le disegno per continuità.
- I versi sulle curve di livello vengono determinati osservando che  $\dot{q} = p/m$  è positivo nel semipiano  $p > 0$  e negativo in quello  $p < 0$ .

Dalla discussione precedente si ha che l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche è tutto lo spazio delle fasi ad eccezione dei punti di equilibrio e dei punti della curva di livello con energia  $H_2$ ; ovvero  $\Pi = [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \setminus (\Gamma_{H_2} \cup \{P_1, P_2\})$ .

Nel caso  $\rho < 1$  lo studio delle curve di livello procede in modo analogo. Una maggiore complicazione nei calcoli è dovuta al fatto che ci sono due punti di equilibrio instabili con energia diversa, infatti  $H(P_1) = \omega^2(1/4 - \rho) < \omega^2(1/4 + \rho) = H(P_2)$ . Quindi in questo caso è necessario disegnare due diverse curve separatrici. I risultati sono in Fig. 3.7.

Dalla Fig. 3.7 si ha che l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche è tutto lo spazio delle fasi ad eccezione dei punti di equilibrio e dei punti delle due separatrici, ovvero  $\Pi = [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \setminus (\Gamma_{H_1} \cup \Gamma_{H_2})$ .

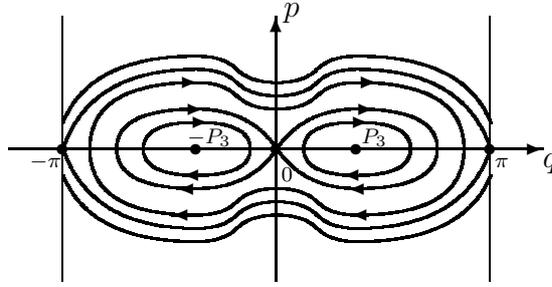


Fig. 3.7. Curve di livello per il pendolo rotante nel caso  $\rho < 1$ . I versi non indicati in figura si ottengono per continuità.

6. Con l'introduzione del termine dissipativo l'equazione del moto diventa  $\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta - \alpha \dot{\theta}$  con  $\alpha > 0$ . Con la stessa sostituzione introdotta al punto 1 si ottiene il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \omega^2 \sin q \cos q - g \sin q - \alpha p \end{cases} \quad (3.37)$$

Il sistema dinamico è nella forma  $(\dot{q}, \dot{p}) = f'(q, p)$  con  $f'(q, p) = f(q, p) + (0, -\alpha p)$ . Voglio studiare la stabilità dei punti critici di questo nuovo sistema nel caso  $\rho < 1$ : in primo luogo osservo che la funzione  $H(q, p)$  non è una costante del moto per il nuovo problema. Infatti

$$\begin{aligned} \dot{H}(q, p) &= \langle \nabla H(q, p), f'(q, p) \rangle = \frac{\partial H}{\partial q}(q, p) f'_1(q, p) + \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) f'_2(q, p) = -f_2(q, p) f'_1(q, p) + f_1(q, p) f'_2(q, p) \\ &= -f_2(q, p) f_1(q, p) + f_1(q, p) (f_2(q, p) - \alpha p) = -\alpha p f_1(q, p) = -\alpha p^2 \end{aligned}$$

che non è una funzione identicamente nulla. Si vede facilmente che i punti critici sono  $P_1, P_2$  e  $P_3$  e linearizzando attorno a  $P_1$  e  $P_2$  si vede che si tratta di punti instabili. Discuto dettagliatamente il punto  $P_3$ : la matrice di linearizzazione si scrive

$$A'(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2(\rho^2 - 1) & -\alpha \end{pmatrix}$$

Gli autovalori  $\lambda$  sono le soluzioni dell'equazione secolare  $\lambda^2 + \alpha\lambda + \omega^2(1 - \rho^2) = 0$ . Si ottiene, quindi,  $\lambda_{1,2} = [-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2(1 - \rho^2)}]/2$ ; si verifica facilmente che  $\text{Re}(\lambda_1), \text{Re}(\lambda_2) < 0$ , quindi il punto  $P_3$  è asintoticamente stabile.

Stima del bacino d'attrazione di  $P_3$ : lo scopo è determinare un dominio chiuso  $D \subset [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$  tale che per ogni  $x^0 \in D$  la traiettoria  $x(t) = \varphi(t, x^0)$  con dato iniziale  $x^0$  tenda asintoticamente a  $P_3$ , ovvero  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = P_3$ . Prima strategia: il Teorema di Lijapunov. Se esiste una funzione  $W : [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale per  $\varepsilon > 0$  soddisfa le seguenti quattro ipotesi

- $W$  è definita e di classe  $C^1$  nella palla aperta  $B_{P_3}(\varepsilon)$  centrata in  $P_3$  e di raggio  $\varepsilon$ ;
- $W(P_3) = 0$  e  $W(x) > 0$  per ogni  $x \in B_{P_3}(\varepsilon) \setminus \{P_3\}$ ;
- $\dot{W}(x) \leq 0$  per ogni  $x \in B_{P_3}(\varepsilon)$ ;
- $\dot{W}(x) < 0$  per ogni  $x \in B_{P_3}(\varepsilon) \setminus \{P_3\}$ ;

allora il punto  $P_3$  è asintoticamente stabile e  $B_{P_3}(\varepsilon)$  è contenuto nel suo bacino d'attrazione.

Una candidata naturale per  $W$  è la funzione

$$W(q, p) := H(q, p) - H(P_3) = \frac{1}{2}p^2 + \omega^2 \left[ \frac{1}{2}(\cos^2 q + \rho^2) - \rho \cos q \right]$$

Il punto  $P_3$  è un minimo per la funzione  $W(q, p)$  e  $W(P_3) = 0$ , quindi è possibile trovare un  $\varepsilon > 0$  abbastanza piccolo tale che le prime due ipotesi del Teorema di Lijapunov siano soddisfatte. Anche la terza ipotesi è soddisfatta, perché  $\dot{W}(q, p) = -\alpha p^2 \leq 0$  in  $B_{P_3}(\varepsilon)$ ; ma sulla quarta ipotesi la funzione scelta fallisce perché sul segmento ottenuto intersecando la palla aperta  $B_{P_3}(\varepsilon)$  con l'asse  $p = 0$  si ha che  $\dot{W}(q, p)$  si annulla. Più precisamente:  $\dot{W}(x) = 0$  per ogni  $x \in I_{P_3}(\varepsilon) := \{(q, p) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} : p = 0\}$ .

È abbastanza naturale osservare che l'insieme su cui la funzione  $W$  fallisce non è un insieme "molto interessante" per il moto del nostro sistema, nel senso che non è possibile trovare delle traiettorie costituite

unicamente da punti di  $I_{P_3}(\varepsilon)$ . Infatti: per assurdo sia  $x(t) = (q(t), p(t))$  una traiettoria che giace interamente su  $I_{P_3}(\varepsilon)$ , allora  $p(t) = 0$  per ogni  $t$ . Quindi

$$\dot{p}(t) = 0 \implies 0 = f'_2(q(t), p(t)) = f'_2(q(t), 0) = f_2(q(t), 0) \implies q(t) = \arcsin \rho$$

Allora l'unica traiettoria tutta contenuta in  $I_{P_3}(\varepsilon)$  è il punto di equilibrio  $P_3$ . A questo punto è ovvio fare ricorso al Teorema di Barbasin. Se esiste una funzione  $W : [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa alle prime tre ipotesi del Teorema di Lijapunov ed esiste un compatto  $D$  tale che

- 4.1.  $P_3 \in D$ ;
- 4.2. se  $I_D := \{x \in D \setminus \{P_3\} : \dot{W}(x) = 0\}$ , non esistono traiettorie costituite unicamente da punti di  $I_D$ ;
- 4.3.  $D$  è positivamente invariante;

allora  $D$  è contenuto nel bacino d'attrazione di  $P_3$ . Si è già visto che la funzione  $W(q, p)$  soddisfa le prime tre ipotesi del Teorema di Lijapunov. Definisco  $D$  come l'insieme compatto costituito da tutti i punti di  $[0, \pi] \times \mathbb{R}$  (seleziono il semipiano  $q \geq 0$ ) contenuti all'interno di una curva di livello con energia  $H = H(P_1) - \delta$  e  $\delta > 0$  piccolo, nel senso che  $\delta < H(P_0) - H(P_3) = \omega^2(1 - \rho)^2/2$ . Il dominio  $D$  soddisfa la 4.1 per costruzione e la 4.2 in virtù dell'osservazione precedente. Quindi resta da dimostrare che  $D$  è positivamente invariante: per fare ciò è sufficiente osservare che sui punti della frontiera di  $D$ , ovvero sui punti di  $\Gamma_H$  il campo  $f'$  punta verso l'interno, ovvero  $\langle f', \hat{n} \rangle < 0$ , con  $\hat{n}$  il versore normale a  $\Gamma_H$  in un suo punto. È ovviamente possibile calcolare in modo esplicito il prodotto scalare  $\langle f', \hat{n} \rangle$ , ma è anche sufficiente osservare che  $f$  è tangente a  $\Gamma_H$ , perché  $H$  è una costante del moto per il sistema (3.35), e quindi  $f'$  punta verso l'interno di  $D$  perché  $f' = f + (0, -\alpha p)$  e  $-\alpha p$  è positivo per  $p < 0$  e negativo per  $p > 0$ .

**Esercizio 3.6.6.** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} + \frac{dV}{dx}(x) = 0 \tag{3.38}$$

con  $x \in \mathbb{R}$  e l'energia potenziale data da  $V(x) = (x^2 - 1)(x + 2)^2$ . Si risponda ai seguenti quesiti: 1. si scriva il principio di conservazione dell'energia. 2. Si studi la funzione energia potenziale e si determino i punti di equilibrio stabile ed instabile. 3. Si discutano qualitativamente le soluzioni della (3.38) al variare dell'energia totale del sistema. 4. Si determini l'insieme  $\Pi$  dei dati iniziali che generano orbite periodiche. 5. Si dimostri che lungo la separatrice il moto è asintotico al punto di equilibrio instabile. Si studi, inoltre, il comportamento asintotico della separatrice attorno al punto di equilibrio instabile. 6. Si dimostri che per  $E = 0$  esiste un moto periodico. Se ne stimi il periodo, lo si calcoli esattamente e si confrontino le stime con il valore esatto. 7. Si scriva come integrale definito il periodo di un moto periodico con energia  $V_5 < E < V_4$ . Si dimostri che è finito. Soluzione: la (3.38) descrive il moto di una palla di massa  $m = 1$  sottoposta all'azione della forza  $f(x) = -dV(x)/dx = -2(x + 2)(2x^2 + 2x - 1)$ .

1. Sia  $E \in \mathbb{R}$  il principio di conservazione dell'energia si scrive

$$H(x, \dot{x}) := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + (x^2 - 1)(x + 2)^2 = E \tag{3.39}$$

2. Insieme di definizione: la funzione  $V(x)$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$ . Zeri della funzione:  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = -1$  e  $x_3 = +1$ . Segno della funzione:  $V(x) \geq 0$  se e solo se  $x \leq x_2$  e  $x \geq x_3$ . Derivata:  $V'(x) = 2(x + 2)(2x^2 + 2x - 1)$ . Punti estremali:  $x_1 = -2$ ,  $x_4 = -(1 + \sqrt{3})/2$  e  $x_5 = -(1 - \sqrt{3})/2$ ;  $x_1$  e  $x_5$  sono punti di minimo, mentre  $x_4$  è un punto di massimo. Si osserva che  $x_1 < x_4 < x_2 < x_5 < x_3$ . Valore assunto dalla funzione negli estremali:

$$V(x_1) = 0 \quad V_4 := V(x_4) = \frac{\sqrt{3}}{8}(3 - \sqrt{3})^2 \quad V_5 := V(x_5) = -\frac{\sqrt{3}}{8}(3 + \sqrt{3})^2$$

Infine osservo che la funzione diverge positivamente quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Si ottiene quindi il grafico in Fig. 3.8. Si osserva che  $x_1$  e  $x_5$  sono punti di equilibrio stabile, mentre  $x_4$  è un punto di equilibrio instabile.

3. Descrizione qualitativa delle soluzioni della (3.38). Considero i seguenti intervalli di energia.

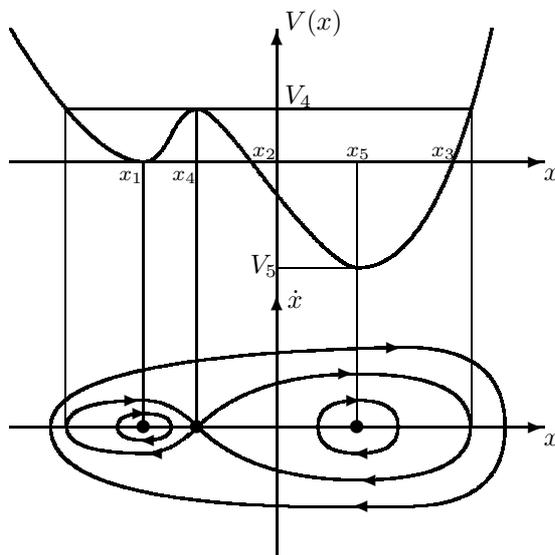


Fig. 3.8. Grafico dell'energia potenziale e curve di livello.

- $E < V_5$ :  $V_5$  è il minimo assoluto della funzione  $V(x)$ , quindi per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha  $E - V(x) < 0$ . Non esiste moto,  $\mathcal{I}_E = \emptyset$ .
  - $E = V_5$ : il punto  $x_5$  è l'unico punto tale che  $E - V(x) \geq 0$ , allora  $\mathcal{I}_E = \{x_5\}$ . La curva di livello è costituita da un solo punto:  $\Gamma_E = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x = (-1 + \sqrt{3})/2, \dot{x} = 0\}$ . L'unica possibile soluzione di (3.38) è il punto di equilibrio stabile  $x(t) = x_5$ .
  - $V_5 < E < 0$ : denoto con  $x_1^E < x_2^E$  le due soluzioni dell'equazione  $E - V(x) = 0$ . L'insieme dei punti accessibili al moto è l'intervallo  $\mathcal{I}_E = [x_1^E, x_2^E]$ . La curva di livello  $\Gamma_E = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_1^E \leq x \leq x_2^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$  è una curva chiusa e regolare attorno a  $(x_5, 0)$ . Poiché la curva di livello non passa per nessun punto di equilibrio, allora esiste una sola orbita periodica coincidente con la curva di livello stessa. I punti  $x_1^E$  e  $x_2^E$  sono i punti di inversione del moto periodico.
  - $E = 0$ : le soluzioni dell'equazione  $E - V(x) = 0$ , ovvero  $V(x) = 0$  sono i tre punti  $x_1, x_2$  e  $x_3$ . L'insieme dei punti accessibili al moto è  $\mathcal{I}_E = [x_2, x_3] \cup \{x_1\}$ . La curva di livello,  $\Gamma_E = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq x \leq x_3, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\} \cup \{(x_1, 0)\}$ , consta di due parti: una curva chiusa e regolare attorno a  $(x_5, 0)$  ed il punto isolato  $(x_1, 0)$ . Sulla curva  $\Gamma_E$  giacciono due orbite: il punto fisso stabile  $x(t) = x_1$  ed un moto periodico con punti di inversione  $x_2$  e  $x_3$ .
  - $0 < E < V_4$ : denoto con  $x_1^E < x_2^E < x_3^E < x_4^E$  le quattro soluzioni dell'equazione  $E - V(x) = 0$ ; si ha  $x_1^E < x_1 < x_2^E < x_3^E < x_5 < x_4^E$ . L'insieme dei punti accessibili al moto è l'unione di due intervalli disgiunti:  $\mathcal{I}_E = [x_1^E, x_2^E] \cup [x_3^E, x_4^E]$ . La curva di livello,  $\Gamma_E = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_1^E \leq x \leq x_2^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\} \cup \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_3^E \leq x \leq x_4^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$ , consta di due curve chiuse e regolari, disgiunte e contenenti nel loro interno rispettivamente i punti  $(x_1, 0)$  e  $(x_5, 0)$ . Su ognuna delle componenti connesse di  $\Gamma_E$  giace un'orbita periodica. L'orbita che ruota attorno a  $(x_1, 0)$  ha  $x_1^E$  e  $x_2^E$  come punti di inversione. L'orbita che ruota attorno a  $(x_5, 0)$  ha  $x_3^E$  e  $x_4^E$  come punti di inversione.
  - $E = V_4$ : denoto con  $x_1^E < x_4 < x_2^E$  le tre soluzioni dell'equazione  $E - V(x) = 0$  ( $V(x) = V_4$ ). L'insieme dei punti accessibili al moto è l'intervallo:  $\mathcal{I}_E = [x_1^E, x_2^E]$ . Il punto  $x_4$  è un minimo del potenziale, quindi è un punto di equilibrio instabile. La curva di livello è la separatrice e consta di tre parti:  $\Gamma_E = \Gamma_E^1 \cup \Gamma_E^2 \cup \Gamma_E^3$  ove  $\Gamma_E^1 = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_1^E \leq x < x_4, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$ ,  $\Gamma_E^2 = \{(x_4, 0)\}$  e  $\Gamma_E^3 = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_4 < x \leq x_2^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$ . Su  $\Gamma_E^1$  e  $\Gamma_E^3$  giacciono due orbite asintotiche omocliniche, mentre su  $\Gamma_E^2$  giace l'orbita corrispondente al punto di equilibrio instabile  $x(t) = x_4$ .
  - $E > V_4$ : denoto con  $x_1^E < x_2^E$  le due soluzioni dell'equazione  $E - V(x) = 0$ . L'insieme dei punti accessibili al moto è l'intervallo  $\mathcal{I}_E = [x_1^E, x_2^E]$ . La curva di livello  $\Gamma_E = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_1^E \leq x \leq x_2^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$  è una curva chiusa e regolare attorno a  $(x_1, 0)$  e  $(x_5, 0)$ . Poiché la curva di livello non passa per nessun punto di equilibrio, allora esiste una sola orbita periodica coincidente con la curva di livello stessa. I punti  $x_1^E$  e  $x_2^E$  sono i punti di inversione del moto periodico.
4. L'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche è  $\Pi = \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_{V_4} \cup \{(x_5, 0)\})$ .

5. Considero l'arco di traiettoria su  $\Gamma_{V_4}^1$  con punto iniziale  $x_1^{V_4}$ . L'equazione della curva di livello è  $\dot{x} = \sqrt{2(V_4 - V(x))}$ , quindi il tempo impiegato a raggiungere il punto di ascissa  $x_4 - \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$  piccolo, è

$$T_\varepsilon = \int_{x_1^{V_4}}^{x_4 - \varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2(V_4 - V(x))}}$$

Il punto  $x_4$  è uno zero almeno doppio del polinomio  $P(x) := V_4 - V(x)$ , poiché  $P(x_4) = 0$  e  $V'(x_4) = 0$ . Pertanto posso scrivere  $V_4 - V(x) = (x - x_4)^2(ax^2 + bx + c)$  con opportuni  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Si ha  $ax^2 + bx + c \geq 0$  per  $x \in [x_1^{V_4}, x_4]$  e inoltre è, ovviamente, limitato nello stesso intervallo chiuso e limitato; quindi esiste un numero reale e positivo  $k$  tale che  $ax^2 + bx + c \leq k$  per  $x \in [x_1^{V_4}, x_4]$ . In conclusione:

$$T_\varepsilon = \int_{x_1^{V_4}}^{x_4 - \varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2(V_4 - V(x))}} \geq \int_{x_1^{V_4}}^{x_4 - \varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{k(x - x_4)^2}} = \int_{x_1^{V_4}}^{x_4 - \varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{k}|x - x_4|} = \int_{x_1^{V_4}}^{x_4 - \varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{k}(x_4 - x)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$$

Il moto su  $\Gamma_{V_4}^1$  è, dunque, asintotico.

Studio, adesso, il comportamento della separatrice attorno al punto di equilibrio instabile  $x_4$ . Considero l'arco di equazione  $\dot{x} = \sqrt{2[V_4 - V(x)]}$ , con  $x \geq x_4$ . Pongo  $P(x) := V_4 - V(x) = V_4 - (x^2 - 1)(x + 2)^2$  e sviluppo in serie di Taylor in un intorno di  $x_4$ . Osservo che

$$\begin{aligned} P(x_4) &= 0 \\ P'(x) &= -V'(x) \implies P'(x_4) = 0 \\ P''(x) &= -6(2x^2 + 4x + 1) \implies P''(x_4) = 6(\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

Allora si può scrivere:

$$P(x) = \frac{1}{2!}6(\sqrt{3} - 1)(x - x_4)^2 + O((x - x_4)^3) = 3(\sqrt{3} - 1)(x - x_4)^2 + O((x - x_4)^3)$$

quindi l'equazione dell'arco di separatrice diventa:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{2[3(\sqrt{3} - 1)(x - x_4)^2 + O((x - x_4)^3)]} = \sqrt{6(\sqrt{3} - 1)(x - x_4)^2 \left[1 + \frac{O((x - x_4)^3)}{3(\sqrt{3} - 1)(x - x_4)^2}\right]} \\ &= \sqrt{6(\sqrt{3} - 1)(x - x_4)^2 [1 + O((x - x_4))]} = \sqrt{6(\sqrt{3} - 1)}|x - x_4| [1 + O((x - x_4))] \\ &= \sqrt{6(\sqrt{3} - 1)}(x - x_4) [1 + O((x - x_4))] \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usato  $x \geq x_4$ . Quindi il termine dominante è lineare ed ha pendenza  $\sqrt{6(\sqrt{3} - 1)}$ .

6. In corrispondenza di  $E = 0$  esiste un'orbita periodica con punti di inversione  $x_2 = -1$  e  $x_3 = +1$ , giacente sulla curva di livello di equazione  $\dot{x} = \pm\sqrt{2[0 - V(x)]} = \pm\sqrt{2(1 - x^2)(x + 2)^2} = \pm(x + 2)\sqrt{2(1 - x^2)}$ . Osservato che dall'equazione della curva di livello si ha  $dt = dx/[(x + 2)\sqrt{2(1 - x^2)}]$ , il periodo  $T$  dell'orbita è dato dal seguente integrale definito:

$$\int_0^{T/2} dt = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x + 2)\sqrt{2(1 - x^2)}} \implies T = \sqrt{2} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x + 2)\sqrt{1 - x^2}} \quad (3.40)$$

L'integrale (3.40) può essere calcolato esattamente per mezzo di una delle due sostituzioni  $x = \sin \varphi$  oppure  $\sqrt{1 - x^2} = (1 - x)y$ . Si ottiene  $T = \pi\sqrt{6}/3 \simeq 0.81\pi$ . Alternativamente al calcolo diretto, è possibile dare una stima di  $T$  riconducendo il calcolo ad integrali semplici. Osservo che nell'intervallo  $[-1, +1]$  si ha  $1 \leq x + 2 \leq 3$ , allora

$$\sqrt{1 - x^2} \leq (x + 2)\sqrt{1 - x^2} \leq 3\sqrt{1 - x^2} \implies \frac{1}{3\sqrt{1 - x^2}} \leq \frac{1}{(x + 2)\sqrt{1 - x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

e quindi

$$T_- := \sqrt{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{3\sqrt{1 - x^2}} \leq T \leq \sqrt{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} =: T_+$$

In modo elementare, sfruttando le proprietà della funzione arcsin, si ha che

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$$

pertanto  $T_- = \sqrt{2}\pi/3 \simeq 0.47\pi$  e  $T_+ = \sqrt{2}\pi \simeq 1.41\pi$ . È possibile migliorare notevolmente le stime suddividendo l'integrale e stimando meglio in ogni intervallo la funzione integranda. Per esempio pongo  $g(x) := (x+2)\sqrt{1-x^2}$  e scrivo:

$$\begin{aligned} \frac{T}{\sqrt{2}} = & \int_{-1}^{-\sqrt{3}/2} \frac{dx}{g(x)} + \int_{-\sqrt{3}/2}^{-\sqrt{2}/2} \frac{dx}{g(x)} + \int_{-\sqrt{2}/2}^{-1/2} \frac{dx}{g(x)} + \int_{-1/2}^0 \frac{dx}{g(x)} \\ & \int_0^{1/2} \frac{dx}{g(x)} + \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{g(x)} + \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{g(x)} + \int_{\sqrt{3}/2}^{+1} \frac{dx}{g(x)} \end{aligned}$$

A questo punto osservo che

$$\begin{aligned} x+2 \leq 2 - \sqrt{3}/2 \quad \text{se} \quad -1 \leq x \leq -\sqrt{3}/2, & \quad x+2 \leq 2 - \sqrt{2}/2 \quad \text{se} \quad -\sqrt{3}/2 \leq x \leq -\sqrt{2}/2 \\ x+2 \leq 2 - 1/2 \quad \text{se} \quad -\sqrt{2}/2 \leq x \leq -1/2, & \quad x+2 \leq 2 \quad \text{se} \quad -1/2 \leq x \leq 0 \\ x+2 \leq 2 + 1/2 \quad \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/2, & \quad x+2 \leq 2 + \sqrt{2}/2 \quad \text{se} \quad 1/2 \leq x \leq \sqrt{2}/2 \\ x+2 \leq 2 + \sqrt{3}/2 \quad \text{se} \quad \sqrt{2}/2 \leq x \leq \sqrt{3}/2, & \quad x+2 \leq 3 \quad \text{se} \quad \sqrt{3}/2 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

e quindi usando la decomposizione precedente dell'integrale definito che fornisce il periodo si ottiene

$$\begin{aligned} T \geq \sqrt{2} & \left\{ \frac{1}{2 - \sqrt{3}/2} \left[ -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{1}{2 - \sqrt{2}/2} \left[ -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right] + \frac{1}{2 - 1/2} \left[ -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right] + \frac{1}{2} \left[ 0 + \frac{\pi}{6} \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2 + 1/2} \left[ \frac{\pi}{6} - 0 \right] + \frac{1}{2 + \sqrt{2}/2} \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right] + \frac{1}{2 + \sqrt{3}/2} \left[ \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right] + \frac{1}{3} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right] \right\} \\ & = \sqrt{2}\pi \left\{ \frac{47}{180} + \frac{2}{21} + \frac{12 + \sqrt{3}}{78} \right\} =: T'_- \end{aligned}$$

Si trova  $T'_- \simeq 0.75\pi$ ; quindi la stima dal basso è stata notevolmente migliorata. Analogamente si può procedere per la stima dall'alto; mi limito a dividere l'integrale in due soli pezzi:

$$T = \sqrt{2} \left\{ \int_{-1}^0 \frac{dx}{g(x)} + \int_0^{+1} \frac{dx}{g(x)} \right\}$$

e osservo che  $x+2 \geq 1$  se  $-1 \leq x \leq 0$ , mentre  $x+2 \geq 2$  se  $0 \leq x \leq +1$ . Allora si ha:

$$T \leq \sqrt{2} \left\{ \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^{+1} \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}} \right\} = \sqrt{2} \left\{ \left[ 0 + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - 0 \right] \right\} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\pi =: T'_+$$

che migliora la stima dall'alto, infatti  $T'_+ \simeq 1.06\pi$ .

7. Sia  $E$  tale che  $V_5 < E < V_4$ . Dalla discussione precedente si ha che esiste almeno un'orbita periodica. Scelgo l'orbita che ruota attorno a  $x_5$  e denoto con  $a < b$  i due punti di inversione:  $a, b$  dipendono da  $E$ , ma per semplicità ometto questa dipendenza nella notazione. Osservo che  $b > 0$  mentre  $a$  può essere sia positivo che negativo. Dall'equazione  $dx/dt = \sqrt{2[E - V(x)]}$  si ottiene

$$\int_0^{T/2} dt = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2[E - V(x)]}} \implies T = \sqrt{2} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} \quad (3.41)$$

ove si è definito  $P(x) := E - V(x)$ . Dimostro che l'integrale (3.41) è convergente e quindi che il periodo è finito: si osserva che  $a$  e  $b$  sono zeri del polinomio  $P(x)$ , ma le inequzioni  $P'(a) \neq 0$  e  $P'(b) \neq 0$  implicano che si tratta di due zeri semplici. Allora si può scrivere:

$$P(x) = (x-a)(b-x)(a_1x^2 + a_2x + a_3)$$

con opportuni numeri reali  $a_1, a_2$  e  $a_3$ . Inoltre il trinomio  $a_1x^2 + a_2x + a_3$  è strettamente positivo nell'intervallo  $[a, b]$ . In conclusione la funzione  $\sqrt{P(x)}$  è un infinitesimo di ordine  $1/2$  in  $a$  e in  $b$ , quindi l'integrale (3.41) è convergente.

**Esercizio 3.6.7.** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} + \frac{dV}{dx}(x) = 0 \quad \text{con} \quad V(x) = \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^4} \quad (3.42)$$

$x \in \mathbb{R}$ . Si risponda ai seguenti quesiti: 1. si scriva il principio di conservazione dell'energia. 2. Si studi la funzione energia potenziale e si determinino i punti di equilibrio stabile ed instabile. 3. Si discutano qualitativamente le soluzioni della (3.42) al variare dell'energia totale del sistema. 4. Si determini l'insieme  $\Pi$  dei dati iniziali che generano orbite periodiche. 5. Si dimostri che il dato iniziale  $(x^0, \dot{x}^0) = (\sqrt{2}, 0)$  genera un'orbita periodica. Si scriva il periodo di tale orbita come integrale definito.

Soluzione: la (3.42) descrive il moto di una palla di massa  $m = 1$  sottoposta all'azione della forza  $f(x) = -dV(x)/dx = -(4x^2 - 6)/x^7$ .

1. Sia  $E \in \mathbb{R}$  il principio di conservazione dell'energia si scrive

$$H(x, \dot{x}) := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^4} = E \quad (3.43)$$

2. La funzione  $V(x)$  è definita su  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ed è pari (simmetrica nello scambio  $x \rightarrow -x$ ). Zeri della funzione:  $x_1 = -1$  e  $x_2 = +1$ . Segno della funzione:  $V(x) \geq 0$  se e solo se  $-1 \leq x \leq +1$  e  $x \neq 0$ . Derivata:  $V'(x) = (4x^2 - 6)/x^7$ . Punti estremali:  $x_3 = -\sqrt{3/2}$  e  $x_4 = \sqrt{3/2}$ ;  $x_1$  e  $x_5$  sono punti di minimo. Si osserva che  $x_3 < x_1 < x_2 < x_4$ . Valore assunto dalla funzione negli estremali:  $V_0 := V(x_3) = V(x_4) = -4/27$ . Infine osservo che  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = 0$ . Si ottiene quindi il grafico in Fig. 3.9. Si osserva che  $x_3$  e  $x_4$  sono punti di equilibrio stabile.

3. Descrizione qualitativa delle soluzioni della (3.42). Considero i seguenti intervalli di energia.

- $E < V_0$ :  $V_0$  è il minimo assoluto della funzione  $V(x)$ , quindi per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha  $E - V(x) < 0$ . Non esiste moto,  $\mathcal{I}_E = \emptyset$ .
- $E = V_0$ : i punti  $x_3$  e  $x_4$  sono gli unici punti tali che  $E - V(x) \geq 0$ , allora  $\mathcal{I}_E = \{x_3, x_4\}$ . La curva di livello è costituita da due punti:  $\Gamma_E = \{(x_3, 0), (x_4, 0)\}$ . Le uniche soluzioni di (3.42) sono i punti di equilibrio stabile  $x(t) = x_3$  e  $x(t) = x_4$ .
- $V_0 < E < 0$ : denoto con  $x_1^E < x_2^E < x_3^E < x_4^E$  le quattro soluzioni dell'equazione  $E - V(x) = 0$ . L'insieme dei punti accessibili al moto è  $\mathcal{I}_E = [x_1^E, x_2^E] \cup [x_3^E, x_4^E]$ . La curva di livello,  $\Gamma_E = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_1^E \leq x \leq x_2^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\} \cup \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_3^E \leq x \leq x_4^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$ , consta di due curve chiuse e regolari, disgiunte e contenenti nel loro interno rispettivamente i punti  $(x_3, 0)$  e  $(x_4, 0)$ . Su ognuna delle componenti connesse di  $\Gamma_E$  giace un'orbita periodica. L'orbita che ruota attorno a  $(x_3, 0)$  ha  $x_1^E$  e  $x_2^E$  come punti di inversione. L'orbita che ruota attorno a  $(x_4, 0)$  ha  $x_3^E$  e  $x_4^E$  come punti di inversione.
- $E = 0$ :  $x_1 = -1$  e  $x_2 = +1$  sono le due soluzioni dell'equazione  $E - V(x) = 0$  ( $V(x) = 0$ ). L'insieme dei punti accessibili al moto è  $\mathcal{I}_E = (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$ . La curva di livello consta di due componenti aperte e disgiunte:  $\Gamma_E = \Gamma_E^1 \cup \Gamma_E^2$  ove  $\Gamma_E^1 = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x < x_1, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$  e  $\Gamma_E^2 = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \geq x_2, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$ . Su  $\Gamma_E^1$  e  $\Gamma_E^2$  giacciono due orbite asintotiche omocliniche rispettivamente a  $(-\infty, 0)$  e  $(+\infty, 0)$ . Si osserva che le particelle si avvicinano all'infinito con velocità nulla, infatti  $\dot{x} = \pm\sqrt{2[E - V(x)]} = \pm\sqrt{-2V(x)} \rightarrow 0$  nel limite  $x \rightarrow \pm\infty$ . In altri termini: le curve di livello si avvicinano asintoticamente a zero.
- $E > 0$ : denoto con  $x_1^E$  e  $x_2^E$  le due soluzioni dell'equazione  $E - V(x) = 0$ . L'insieme dei punti accessibili al moto è  $\mathcal{I}_E = (-\infty, x_1^E] \cup [x_2^E, \infty)$ . La curva di livello consta di due componenti aperte e disgiunte:  $\Gamma_E = \Gamma_E^1 \cup \Gamma_E^2$  ove  $\Gamma_E^1 = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x < x_1^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$  e  $\Gamma_E^2 = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \geq x_2^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$ . Su  $\Gamma_E^1$  e  $\Gamma_E^2$  giacciono due orbite asintotiche rispettivamente a  $+\infty$  e  $-\infty$ . Si osserva che le particelle si avvicinano all'infinito con velocità finita, infatti  $\dot{x} = \pm\sqrt{2[E - V(x)]} \rightarrow \pm\sqrt{2E}$  nel limite  $x \rightarrow \pm\infty$ . In altri termini: le curve di livello hanno un asintoto orizzontale.

4. L'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche è

$$\Pi = \{(x^0, \dot{x}^0) \in \mathbb{R}^2 : V_0 < H(x^0, \dot{x}^0) = \frac{1}{2}(\dot{x}^0)^2 + V(x^0) < 0\}$$

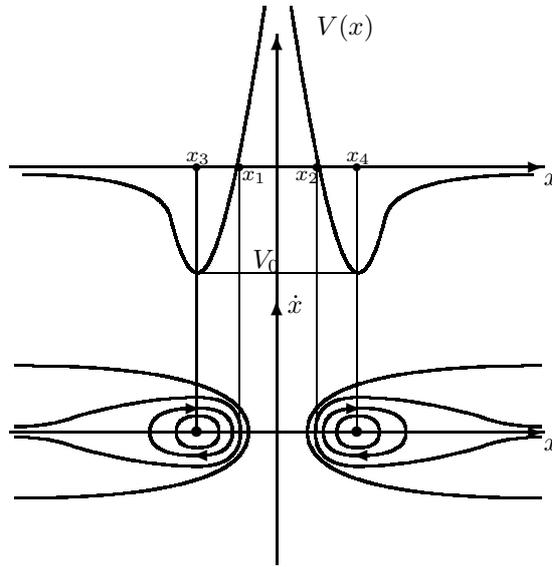


Fig. 3.9. Grafico dell'energia potenziale e curve di livello. I versi di percorrenza sono gli stessi su tutte le curve di livello.

5. Considero il punto  $P_0 = (\sqrt{2}, 0)$  e osservo che  $H(P_0) = 0^2/2 + V(\sqrt{2}) = -1/8$ . Pertanto i risultati del punto precedente e l'osservazione  $V_0 < -1/8 < 0$  implicano che il punto  $P_0$  origina un'orbita periodica. Risolvendo l'equazione  $V(x) = -1/8$  si ottengono i punti di inversione del moto  $\hat{x}_1 = \sqrt{\sqrt{5}-1} < \hat{x}_2 = \sqrt{2}$ . Infatti,  $V(x) = -1/8$  è equivalente a  $x^6 - 8x^2 + 8 = 0$ ; da quest'ultima si ottiene  $(x-2)^2(x^4 + 2x^2 - 4) = 0$  utilizzando il metodo di Ruffini oppure osservando che

$$\begin{aligned} x^6 - 8x^2 + 8 &= x^6 - 8x^2 + 16 - 8 = x^6 - 8 - 8(x^2 - 2) = (x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 + 4) - 8(x^2 - 2) \\ &= (x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 + 4 - 8) = (x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 - 4) \end{aligned}$$

Infine si ottengono le soluzioni  $\hat{x}_1$  e  $\hat{x}_2$ . Dall'equazione  $dx/dt = \sqrt{2[E - V(x)]}$  si ottiene

$$\int_0^{T/2} dt = \int_{\sqrt{\sqrt{5}-1}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2 \left[ \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} - \frac{1}{8} \right]}} \implies T = 4 \int_{\sqrt{\sqrt{5}-1}}^{\sqrt{2}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{-x^6 + 8x^2 - 8}}$$

**Esercizio 3.6.8.** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} + \frac{dV}{dx}(x) = 0 \quad \text{con} \quad V(x) = 1 - \cos x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.44)$$

Si dimostra che se la particella ha energia totale  $E = 1$  allora esiste un'orbita periodica con punti di inversione  $x_1 = -\pi/2$  e  $x_2 = \pi/2$ : se ne scriva il periodo come integrale definito e se ne dia una stima.

Soluzione: dal principio di conservazione dell'energia si ottiene  $\dot{x} = \pm\sqrt{2[E - V(x)]}$ . Pertanto, lungo l'orbita con energia  $E = 1$ , si ha  $\dot{x} = \pm\sqrt{2\cos x}$ . Integrando la precedente si ottiene:

$$\int_0^{T/2} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{2\cos x}} \implies \frac{T}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}} \implies T = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$$

ove nell'ultima implicazione si è utilizzata la parità della funzione coseno. Per stimare l'integrale possiamo riscriverlo utilizzando le formule parametriche  $\cos x = (1 - \tan^2(x/2))/(1 + \tan^2(x/2))$ :

$$T = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}} = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} dx \sqrt{\frac{1 + \tan^2(x/2)}{1 - \tan^2(x/2)}} = 4\sqrt{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+t^2)(1-t^2)}}$$

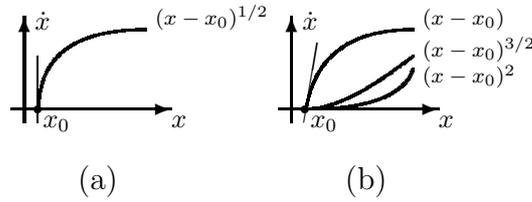


Fig. 3.10. Comportamento asintotico di una curva di livello (a) e di una separatrice (b).

con l'ultimo integrale ottenuto per mezzo della sostituzione  $t = \tan(x/2)$ . A questo punto si può osservare che nell'intervallo  $0 \leq t \leq 1$  si ha  $1 \leq 1 + t^2 \leq 2$ , quindi si ottengono le stime

$$T_- := 4\sqrt{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2(1-t^2)}} \leq T \leq 4\sqrt{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}} =: T_+$$

e quindi  $T_- = 2\pi$  e  $T_+ = 2\sqrt{2}\pi$ . Infine, posto  $T_M := (T_- + T_+)/2 = \pi(1 + \sqrt{2})$  e  $\Delta T := T_+ - T_- = 2\pi(\sqrt{2} - 1)$  si ha l'errore relativo:

$$\frac{\Delta T}{T_M} = \frac{2\pi(\sqrt{2} - 1)}{\pi(\sqrt{2} + 1)} = 0.343$$

È possibile stimare dall'alto il periodo in modo alternativo agendo sull'integrale di partenza: nell'intervallo  $0 \leq x \leq \pi/2$  si ha  $\cos x \geq 1 - 2x/\pi$ . Quindi si ottiene la nuova stima:

$$T'_+ = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-2x/\pi}} = 2\frac{\pi}{2}\sqrt{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = 2\pi\sqrt{2}$$

Osservo che  $T'_+ = \sqrt{2}T_+$ , quindi la nuova stima è decisamente peggiore della precedente.

**Esercizio 3.6.9.** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale  $\ddot{x} + dV/dx = 0$  con  $V(x)$  di classe  $C^1$  su  $\mathbb{R}$ . 1. Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  tale che la curva di livello con energia  $V_0 := V(x_0)$  è chiusa, regolare e definita in  $[x_0, x_1]$  per  $x_1 > x_0$  opportuno. Si studi il comportamento della curva di livello in un intorno di  $x_0$ . 2. Sia  $x_0$  un punto di massimo relativo per  $V(x)$ . Si studi il comportamento della separatrice in un intorno di  $x_0$  (si veda anche il punto 5 dell'Esercizio 3.6.6).

Soluzione: 1. dal principio di conservazione dell'energia si ha che l'equazione dell'arco di curva di livello nel semipiano  $\dot{x} \geq 0$  è  $\dot{x} = \sqrt{2[V_0 - V(x)]}$ . Pongo  $P(x) = 2[V_0 - V(x)]$  ed osservo che

- $P'(x) = -2V'(x)$ .
- $P(x_0) = 0$  e  $P'(x_0) \neq 0$ ,

infatti  $V(x_0) = V_0$  e  $x_0$  non è un punto estrema di  $V(x)$ . Scrivo lo sviluppo in serie di Taylor di  $P(x)$  in un intorno destro di  $x_0$ :

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}P''(x_0)(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3) \quad (3.45)$$

Poiché la derivata prima della funzione  $P(x)$  non si annulla in  $x_0$  posso arrestare lo sviluppo al primo ordine e scrivere

$$\begin{aligned} P(x) &= P'(x_0)(x - x_0) + O((x - x_0)^2) = P'(x_0)(x - x_0) \left[ 1 + \frac{O((x - x_0)^2)}{P'(x_0)(x - x_0)} \right] \\ &= P'(x_0)(x - x_0) [1 + O(x - x_0)] \end{aligned}$$

Quindi per la curva di livello ottengo:

$$\dot{x} = \sqrt{P(x)} = \sqrt{P'(x_0)(x - x_0) [1 + O(x - x_0)]} = \sqrt{P'(x_0)(x - x_0)^{1/2}} [1 + O(x - x_0)]$$

Conclusione: la curva di livello in un intorno piccolo di  $x_0$  è ben approssimata dalla radice quadrata di  $x - x_0$  (si veda la Fig 3.10(a)), in particolare ha tangente verticale.

2. Lo studio procede come al punto precedente, ma in questo caso  $P'(x_0) = 0$  perché  $x_0$  è un punto di massimo per il potenziale  $V(x)$ . Allora non ha senso arrestare lo sviluppo (3.45) al primo ordine, devo considerare le derivate successive. Alcuni casi:

– se  $P''(x_0) \neq 0$ , allora arresto lo sviluppo al secondo ordine ed ottengo

$$P(x) = \frac{1}{2!}P''(x_0)(x-x_0)^2[1+O(x-x_0)] \implies \dot{x} = \sqrt{\frac{1}{2!}P''(x_0)(x-x_0)[1+O(x-x_0)]}$$

La separatrice è ben approssimata da una retta di pendenza  $\sqrt{P''(x_0)/2!}$  in un intorno piccolo di  $x_0$  (si veda la Fig. 3.10(b)).

– Se  $P''(x_0) = 0$  e  $P'''(x_0) \neq 0$ , allora arresto lo sviluppo al terzo ordine ed ottengo

$$P(x) = \frac{1}{3!}P'''(x_0)(x-x_0)^3[1+O(x-x_0)] \implies \dot{x} = \sqrt{\frac{1}{3!}P'''(x_0)(x-x_0)^{3/2}[1+O(x-x_0)]}$$

La separatrice è ben approssimata dalla curva  $\sqrt{P'''(x_0)/3!}(x-x_0)^{3/2}$  in un intorno piccolo di  $x_0$ . La separatrice ha tangente orizzontale (si veda la Fig. 3.10(b)).

– Se  $P''(x_0) = P'''(x_0) = 0$  e  $P''''(x_0) \neq 0$ , allora arresto lo sviluppo al quarto ordine ed ottengo

$$P(x) = \frac{1}{4!}P''''(x_0)(x-x_0)^4[1+O(x-x_0)] \implies \dot{x} = \sqrt{\frac{1}{4!}P''''(x_0)(x-x_0)^2[1+O(x-x_0)]}$$

La separatrice è ben approssimata dalla parabola  $\sqrt{P''''(x_0)/4!}(x-x_0)^2$  in un intorno piccolo di  $x_0$ . La separatrice ha tangente orizzontale (si veda la Fig. 3.10(b)).

### 3.7. Moti centrali.

Si consideri una particella di massa  $\mu$  che si muove in  $\mathbb{R}^3$  sottoposta all'azione di una forza conservativa  $\vec{f}(\vec{r})$ , con  $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , derivante da un potenziale centrale  $V(r)$ , con  $r = |\vec{r}|$ . L'equazione del moto si scrive:

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f}(r) \quad \text{ove} \quad \vec{f}(r) = -\nabla V(r) = -\frac{d}{dr}V(r) \quad (3.46)$$

Si dimostra che il momento angolare della particella  $\vec{L} := \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$  è una costante del moto. Il moto è quindi planare e si svolge in un piano ortogonale a  $\vec{L}$  e passante per l'origine. Se su questo piano si definiscono le coordinate polari  $\rho$  e  $\theta$ , allora si ha che le equazioni del moto assumono la forma

$$\begin{cases} \mu\ddot{\rho} = -\frac{d}{d\rho}V_{\text{eff}}(\rho) \\ \dot{\theta} = \frac{L}{\mu\rho^2} \end{cases} \quad (3.47)$$

ove  $L \in \mathbb{R}$  è la componente del momento angolare lungo l'asse ortogonale al piano su cui si svolge il moto e  $V_{\text{eff}}$  è il potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(\rho) := V(\rho) + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} \quad (3.48)$$

Alcuni commenti:

- il moto radiale della particella è stato ricondotto al moto unidimensionale di una particella di massa  $\mu$  sottoposta all'azione di una forza derivante dal potenziale  $V_{\text{eff}}$ .
- Il moto angolare è integrabile se è nota la soluzione dell'equazione radiale. Formalmente:

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t ds \frac{L}{\mu\rho^2(s)}$$

Si può osservare che  $\dot{\theta}$  ha segno definito ed uguale a quello di  $L$ , quindi la particella ruota attorno all'origine sempre nello stesso verso.

– Se  $L \neq 0$ , l'equazione dell'orbita  $\rho = \rho(\theta)$  è soluzione delle due seguenti equazioni differenziali, note rispettivamente come prima e seconda forma dell'orbita:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{\mu\rho^2}{L} \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - V_{\text{eff}}(\rho)]} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{L^2} \frac{d}{du} \left[ V_{\text{eff}} \left( \frac{1}{u} \right) \right] \quad (3.49)$$

ove  $u = 1/\rho$ .

**Esercizio 3.7.2.** Si consideri una particella di massa  $\mu$  sottoposta all'azione di una forza centrale di potenziale

$$V(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{6}r^6 \quad (3.50)$$

1. Si scrivano le equazioni del moto ed il principio di conservazione dell'energia. 2. Si disegni il grafico del potenziale efficace. 3. Si discuta qualitativamente il moto della particella e si dimostri che se il momento angolare  $L$  è abbastanza piccolo allora esistono due moti circolari uniformi. Se ne determinino i periodi  $T_1$  e  $T_2 < T_1$ . 4. Sia  $\rho_1$  il raggio dell'orbita con periodo  $T_1$ . Si studi il moto della particella con momento angolare  $L$  posta in  $\rho(0) = \rho_1$  con velocità radiale iniziale  $\dot{r}(0) = \sqrt{2\varepsilon/\mu}$ , con  $\varepsilon > 0$  piccolo. 5. Si ponga e si studi il problema analogo al caso 4 per l'orbita di periodo  $T_2$ .

Soluzione: 1. il moto su un piano ortogonale a  $\vec{L}$  viene descritto in termini delle coordinate polari  $\rho$  e  $\theta$ . Si considera il potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} = \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{6}\rho^6 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} \quad (3.51)$$

Usando (3.47) si ottengono le equazioni del moto:

$$\begin{cases} \mu\ddot{\rho} = -\rho + \rho^5 + \frac{L^2}{\mu\rho^3} \\ \dot{\theta} = \frac{L}{\mu\rho^2} \end{cases} \quad (3.52)$$

Sia  $E \in \mathbb{R}$ , il principio di conservazione dell'energia si scrive come segue:

$$E = \frac{1}{2\mu}\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}} = \frac{1}{2\mu}\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{6}\rho^6 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} \quad (3.53)$$

2. Studio la funzione potenziale efficace: osservo che  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty$  e  $\lim_{\rho \rightarrow 0} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$ . Calcolo la derivata prima:  $V'_{\text{eff}} = \rho - \rho^5 - L^2/\mu\rho^3$ . L'equazione  $V'_{\text{eff}} = 0$  non ha soluzioni reali se  $L^2 > \mu/4$ , mentre ne ha due distinte

$$0 < \rho_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{L^2}{\mu}}} < \rho_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{L^2}{\mu}}}$$

nel caso  $L^2 < \mu/4$ . Il caso  $L^2 > \mu/4$  è semplice, studio in dettaglio il caso interessante  $L^2 < \mu/4$ . I punti estremali  $\rho_1$  e  $\rho_2$  sono rispettivamente un punto di minimo e di massimo. Si pone  $V_1 := V_{\text{eff}}(\rho_1)$ ,  $V_2 := V_{\text{eff}}(\rho_2)$  e si trova

$$0 < V_1 = \frac{1}{6\mu\rho_1^2} \left[ \mu + 4L^2 - \sqrt{\mu(\mu - 4L^2)} \right] < V_2 = \frac{1}{6\mu\rho_2^2} \left[ \mu + 4L^2 + \sqrt{\mu(\mu - 4L^2)} \right]$$

Il grafico del potenziale efficace è rappresentato in Fig. 3.11.

3. Descrizione qualitativa delle soluzioni delle equazioni (3.52). Studio l'equazione radiale ed ottengo informazioni sul moto della palla  $\mu$ . Considero i seguenti intervalli di energia:

- $E < V_1$ : denoto con  $\rho^E$  la sola soluzione dell'equazione  $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$ . Il moto è ammissibile nella regione  $\rho \geq \rho^E$ . Esiste un'orbita illimitata.
- $E = V_1$ : le due soluzioni dell'equazione  $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$  sono  $\rho_1$  e  $\rho^E > \rho_1$ . Il moto è ammissibile nella regione  $\{\rho_1\} \cup [\rho^E, +\infty)$ . Esiste un'orbita illimitata ed un'orbita a distanza fissa dall'origine:  $\rho(t) = \rho_1$ . Quindi esiste un moto circolare. Per il moto circolare posso scrivere l'equazione radiale:  $\dot{\theta} = L/(\mu\rho^2(t)) = L/(\mu\rho_1^2)$ . Quindi la velocità angolare è costante: il moto è circolare uniforme. Infine, il periodo del moto è  $T_1 = 2\pi/\dot{\theta} = 2\pi\mu\rho_1^2/L$ .

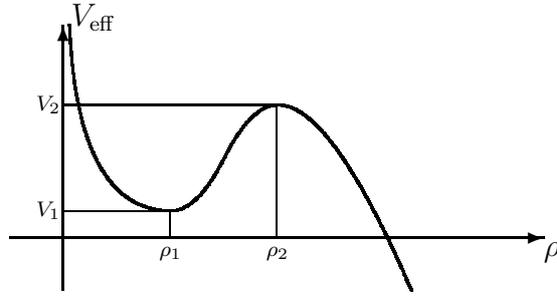


Fig. 3.11. Grafico del potenziale efficace.

- $V_1 < E < V_2$ : denoto con  $\rho_1^E < \rho_2^E < \rho_3^E$  le tre soluzioni dell'equazione  $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$ . Il moto è ammissibile nella regione  $[\rho_1^E, \rho_2^E] \cup [\rho_3^E, +\infty)$ . Esiste un'orbita illimitata che si svolge nella regione  $\rho \geq \rho_3^E$  ed un'orbita limitata che si svolge nella corona circolare di raggio interno  $\rho_1^E$  e raggio esterno  $\rho_2^E$ .
- $E = V_2$ : le due soluzioni dell'equazione  $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$  sono  $\rho_2$  e  $\rho^E < \rho_2$ . Il moto è ammissibile nella regione  $[\rho^E, +\infty)$ . Esistono due orbite illimitate ed asintotiche a  $\rho_2$ , un'orbita limitata che si svolge nella corona circolare di raggi  $\rho^E$  e  $\rho_2$  e che è asintotica a  $\rho_2$ . Infine esiste un'orbita a distanza fissa dall'origine:  $\rho(t) = \rho_2$ . Quindi esiste un moto circolare. Per il moto circolare posso scrivere l'equazione radiale:  $\dot{\theta} = L/(\mu\rho^2(t)) = L/(\mu\rho_2^2)$ . Quindi la velocità angolare è costante: il moto è circolare uniforme. Infine, il periodo del moto è  $T_2 = 2\pi/\dot{\theta} = 2\pi\mu\rho_2^2/L$ .
- $E > V_2$ : denoto con  $\rho^E$  la sola soluzione dell'equazione  $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$ . Il moto è ammissibile nella regione  $\rho \geq \rho^E$ . Esiste un'orbita illimitata.

4. Fissato il momento angolare  $L$  della particella, l'orbita circolare uniforme  $\rho(t) = \rho_1$  è ottenuta con una condizione iniziale  $\rho(0) = \rho_1$ ,  $\dot{\rho}(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) = L/(\mu\rho_1^2)$  e  $\theta(0)$  arbitrario (per esempio  $\theta(0) = 0$ ). In altri termini la particella viene posta a distanza  $\rho_1$  dall'origine e viene lanciata con velocità angolare  $\dot{\theta}(0) = L/(\mu\rho_1^2)$  tangenzialmente alla circonferenza di raggio  $\rho_1$  centrata nell'origine (Fig. 3.12a). Ora si considera la medesima condizione iniziale, ma con una piccola velocità radiale  $\dot{\rho}(0) = \sqrt{2\varepsilon/\mu}$  (Fig. 3.12b). Osservo che l'energia radiale della particella è

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2(0) + V_{\text{eff}}(\rho_1) = V_1 + \varepsilon > V_1$$

quindi l'orbita non è circolare, ma si sviluppa all'interno di una corona circolare di raggi  $\rho_1(\varepsilon) < \rho_2(\varepsilon)$ . Mi pongo il problema di descrivere l'orbita della particella per piccoli valori di  $\varepsilon$  (al primo ordine in  $\varepsilon$ ).

In primo luogo determino i due raggi  $\rho_1(\varepsilon) < \rho_2(\varepsilon)$ : devo risolvere l'equazione  $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$ . Pongo  $\rho = \rho_1 + \delta$  con  $\delta \in \mathbb{R}$  piccolo e risolvo l'equazione sviluppandola al secondo ordine in  $\delta$ .

$$E - V_{\text{eff}}(\rho_1 + \delta) = 0 \implies V_1 + \varepsilon - \frac{1}{2}(\rho_1 + \delta)^2 + \frac{1}{6}(\rho_1 + \delta)^6 - \frac{L^2}{2\mu\rho_1^2(1 + \frac{2\delta}{\rho_1} + \frac{\delta^2}{\rho_1^2})^2} = 0$$

Troncando lo sviluppo delle potenze dei binomi e della serie geometrica al secondo ordine in  $\delta$  si ha:

$$V_1 + \varepsilon - \frac{1}{2}(\rho_1^2 + 2\delta\rho_1) + \frac{1}{6}(\rho_1^6 + 6\delta\rho_1^5) - \frac{L^2}{2\mu\rho_1^2} \left[ 1 - \left( \frac{2\delta}{\rho_1} + \frac{\delta^2}{\rho_1^2} \right) + \left( \frac{2\delta}{\rho_1} + \frac{\delta^2}{\rho_1^2} \right)^2 \right] = 0$$

Arrestando lo sviluppo del termine in parentesi quadre al secondo ordine in  $\delta$  si ha:

$$V_1 + \varepsilon - \frac{1}{2}(\rho_1^2 + 2\delta\rho_1) + \frac{1}{6}(\rho_1^6 + 6\delta\rho_1^5) - \frac{L^2}{2\mu\rho_1^2} \left[ 1 - \frac{2\delta}{\rho_1} + \frac{3\delta^2}{\rho_1^2} \right] = 0$$

A questo punto si osserva che i termini non dipendenti da  $\delta$  ricostruiscono  $-V_{\text{eff}}(\rho_1) = -V_1$  ed i coefficienti dei termini lineari in  $\delta$  ricostruiscono  $-V'_{\text{eff}}(\rho_1) = 0$ , quindi l'equazione si semplifica notevolmente e si ottiene

$$\varepsilon - \frac{1}{2\mu\rho_1^4}\delta^2(\mu\rho_1^4 - 5\mu\rho_1^8 + 3L^2) = 0 \implies \delta = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon}{A}}$$

ove si è posto  $A = (\mu\rho_1^4 - 5\mu\rho_1^8 + 3L^2)/2\mu\rho_1^4 > 0$ . In conclusione se la particella con energia  $V_1 + \varepsilon$  viene posta all'istante iniziale in  $\rho(0) = \rho_1$ , allora essa avrà un'orbita limitata che si svolge all'interno della corona circolare

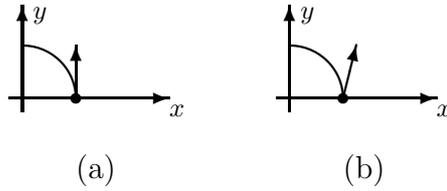


Fig. 3.12. Condizioni iniziali: (a) per l'orbita circolare; (b) per una piccola deviazione dall'orbita circolare.

di raggi

$$\rho_1(\varepsilon) = \rho_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{A}} < \rho_2(\varepsilon) = \rho_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon}{A}}$$

Determinazione della legge oraria radiale al primo ordine in  $\varepsilon$ : devo integrare l'equazione che si ottiene dal principio di conservazione dell'energia  $E = \mu\dot{\rho}^2/2 + V_{\text{eff}}(\rho)$ . Poiché  $\rho_1(\varepsilon) < \rho < \rho_2(\varepsilon)$  sviluppare l'equazione precedente al primo ordine in  $\varepsilon$  vuol dire arrestare lo sviluppo di  $V_{\text{eff}}(\rho)$  in  $\rho - \rho_1$  al secondo ordine. Quindi:

$$V_{\text{eff}}(\rho) = V_{\text{eff}}(\rho_1) + V'_{\text{eff}}(\rho)(\rho - \rho_1) + \frac{1}{2}V''_{\text{eff}}(\rho_1)(\rho - \rho_1)^2 + O((\rho - \rho_1)^3) = V_1 + A(\rho - \rho_1)^2 + O((\rho - \rho_1)^3)$$

Sostituendo nel principio di conservazione dell'energia si ottiene l'equazione differenziale

$$\dot{\rho}^2 = \frac{2}{\mu} [\varepsilon - A(\rho - \rho_1)^2]$$

che può essere integrata con condizione iniziale  $\rho(0) = \rho_1$  per ottenere

$$\rho(t) = \rho_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon}{A}} \sin\left(\sqrt{\frac{2A}{\mu}}t\right)$$

Pertanto durante la rivoluzione attorno all'origine, la particella compie radialmente oscillazioni di periodo  $T_{\text{osc}} = 2\pi\sqrt{\mu/2A}$  ed ampiezza  $\sqrt{\varepsilon/A}$ . È interessante osservare che se il periodo di rivoluzione viene approssimato con  $T_1$  allora

$$\frac{T_{\text{osc}}}{T_{\text{riv}}} \simeq \sqrt{\frac{L^2}{\mu\rho_1^4 - 5\mu\rho_1^8 + 3L^2}}$$

che è una funzione strettamente crescente da  $1/2$  a  $+\infty$  nell'intervallo  $0 \leq L < \sqrt{\mu/4}$ . quindi il periodo di oscillazione è la metà di quello di rivoluzione per  $L \rightarrow 0$ , mentre è molto maggior di quello di rivoluzione per  $L$  grande. In altri termini: la nuova condizione iniziale perturba poco il moto circolare uniforme se  $L$  è grande, mentre lo perturba pesantemente se  $L$  è piccolo.

5. Fissato il momento angolare  $L \neq 0$  considero la condizione iniziale  $\rho(0) = \rho_2$ ,  $\dot{\theta}(0) = L/\mu\rho_2^2$  e  $\dot{\rho}(0) = \sqrt{2\varepsilon/\mu}$ . Si verifica facilmente che l'energia totale radiale è  $E = V_2 + \varepsilon$ . Allora l'orbita della particella è illimitata e la particella si allontana indefinitamente da  $\rho(0) = \rho_1$ . È possibile stimare in modo molto "rozzo" la legge oraria radiale:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho) \implies \dot{\rho}^2 = \frac{2}{\mu} [E - V_{\text{eff}}(\rho)] = \frac{2}{\mu} [V_2 + \varepsilon - V_{\text{eff}}(\rho)] \geq \frac{2}{\mu} [V_2 + \varepsilon - V_{\text{eff}}(\rho_2)] = \frac{2\varepsilon}{\mu} \quad ,$$

da cui si ottiene  $\rho(t) \geq \rho_1 + \sqrt{2\varepsilon/\mu}t$ .

**Esercizio 3.7.3.** Si consideri una particella di massa  $\mu$  sottoposta all'azione di una forza centrale di potenziale

$$V(r) = \kappa r^2 + \frac{\alpha}{r^2} \quad (3.54)$$

con  $\kappa > 0$ . 1. Si scrivano le equazioni del moto ed il principio di conservazione dell'energia. 2. Si disegni il grafico del potenziale efficace nel caso  $\gamma := 1 + 2\mu\alpha/L^2 > 0$ . 3. Si discuta qualitativamente il moto della particella e si dimostri che esiste un moto circolare uniforme di raggio  $\rho_0$ . Se ne determinini il periodo  $T_0$ . 4. Sia  $V_0 = V_{\text{eff}}(\rho_0)$ : si scriva l'equazione dell'orbita per moti con energia  $E > V_0$ . 5. Si dica per quali valori di  $\alpha$  l'orbita determinata al punto 4 è chiusa.

Soluzione: si veda la soluzione di [8] per il moto armonico in tre dimensioni.

### 3.8. Serie di Fourier e equazioni differenziali ordinarie

Nel Paragrafo 3 si è mostrato come uno dei problemi legati alla risoluzione di un'equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti sia la determinazione di un suo integrale particolare. Si è citato il metodo generale di variazione delle costanti arbitrarie e si è sottolineato come sia di applicazione difficile e macchinosa. Si è visto, inoltre, che spesso conviene cercare la soluzione in una forma scelta "ad hoc" per il termine noto  $f$  dell'equazione (3.5): tale soluzione "putativa" contiene costanti sconosciute a priori che possono essere determinate sostituendo la soluzione nell'equazione stessa, si rimanda all'Esempio 3.7. Come verrà illustrato nei quattro esempi seguenti tale tecnica è di semplice applicazione nel caso in cui il termine noto è costante o sinusoidale.

**Esempio 3.8.** Carica del condensatore. Si consideri il circuito  $RC$  illustrato nell'Esercizio 3.8.3, si denoti con  $q$  la carica sul condensatore e con  $I$  la corrente che scorre nella maglia. Si supponga che il potenziale esterno applicato al circuito sia  $V_{in}(t) = 0$  se  $t < 0$  e  $V_{in}(t) = V_0$  se  $t \geq 0$ . L'andamento della carica  $q(t)$  sul condensatore a tempi positivi è regolato dall'equazione di Kirchoff  $\dot{q} + q/\tau = V_0/R$ , ove si è introdotta la costante di tempo del circuito  $\tau := RC$ . L'integrale generale dell'equazione omogenea è dato da  $q_{om}(t) = c \exp\{-t/\tau\}$  con  $c \in \mathbb{R}$  una costante arbitraria che andrà determinata a partire dalla condizione iniziale. Per determinare una soluzione particolare della completa si prova con  $\bar{q}(t) = a$  con  $a \in \mathbb{R}$ : sostituendo nella completa si ottiene

$$\frac{d}{dt}\bar{q} + \frac{1}{\tau}\bar{q} = \frac{V_0}{R} \implies 0 + \frac{a}{\tau} = \frac{V_0}{R} \implies a = \frac{\tau V_0}{R} = CV_0$$

E quindi la soluzione della maglia è  $q(t) = CV_0 + c \exp\{-t/\tau\}$ ; se si suppone che all'istante iniziale il condensatore fosse scarico, ovvero  $q(0) = 0$ , si può determinare la costante arbitraria  $c$

$$q(0) = 0 \implies CV_0 + c \exp\{-0/\tau\} = 0 \implies CV_0 + c = 0 \implies c = -CV_0$$

e scrivere l'unica soluzione del problema di Cauchy  $q(t) = CV_0 - CV_0 \exp\{-t/\tau\} = CV_0(1 - \exp\{-t/\tau\})$ .

**Esempio 3.9.** Funzione di trasferimento. Si consideri il circuito  $RC$  illustrato nell'Esercizio 3.8.3, si denoti con  $q$  la carica sul condensatore e con  $I$  la corrente che scorre nella maglia. Si supponga che il potenziale esterno applicato al circuito sia  $V_{in}(t) = V_0 \sin \Omega t$ . L'andamento della carica  $q(t)$  sul condensatore a tempi positivi è regolato dall'equazione di Kirchoff  $\dot{q} + q/\tau = V_0/R$ , ove si è introdotta la costante di tempo del circuito  $\tau := RC$ . L'integrale generale dell'equazione omogenea è dato da  $q_{om}(t) = c \exp\{-t/\tau\}$  con  $c \in \mathbb{R}$  una costante arbitraria che andrà determinata a partire dalla condizione iniziale. Per determinare una soluzione particolare della completa si prova con  $\bar{q}(t) = a \cos \Omega t + b \sin \Omega t$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ : sostituendo nella completa si ottiene

$$-a\Omega \sin \Omega t + b\Omega \cos \Omega t + \frac{1}{\tau}(a \cos \Omega t + b \sin \Omega t) = \frac{V_0}{R} \sin \Omega t \implies \begin{cases} -a\Omega + b/\tau = V_0/R \\ b\Omega + a/\tau = 0 \end{cases}$$

Si ha, quindi,

$$a = -\frac{V_0 C \tau \Omega}{1 + \tau^2 \Omega^2}, \quad e \quad b = \frac{V_0 C}{1 + \tau^2 \Omega^2} \implies \bar{q}(t) = \frac{V_0 C}{1 + \tau^2 \Omega^2} (\sin \Omega t - \tau \Omega \cos \Omega t)$$

Moltiplicando e dividendo per  $\sqrt{1 + \tau^2 \Omega^2}$  e introducendo l'angolo  $\varphi$  tale che  $\cos \varphi = 1/\sqrt{1 + \tau^2 \Omega^2}$  e  $\sin \varphi = -\Omega\tau/\sqrt{1 + \tau^2 \Omega^2}$  si può scrivere

$$\bar{q}(t) = \frac{V_0 C}{\sqrt{1 + \tau^2 \Omega^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \Omega^2}} \sin \Omega t - \frac{\tau \Omega}{\sqrt{1 + \tau^2 \Omega^2}} \cos \Omega t \right) = \frac{V_0 C}{\sqrt{1 + \tau^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t + \varphi)$$

L'integrale generale dell'equazione del circuito è  $q(t) = \bar{q}(t) + c \exp\{-t/\tau\}$ ; per tempi abbastanza grandi,  $a$  regime, il transiente esponenziale può essere trascurato e quindi la carica sul condensatore oscilla sinusoidalmente

con pulsazione  $\Omega$ . È interessante scrivere a regime l'espressione del potenziale  $V_C := q/C$  ai capi del condensatore e di quello  $V_R := IR$  ai capi della resistenza

$$V_C = \frac{q}{C} = \frac{V_0}{\sqrt{1 + \tau^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t + \varphi) \quad \text{e} \quad V_R = \dot{q}R = \frac{V_0 \tau \Omega}{\sqrt{1 + \tau^2 \Omega^2}} \cos(\Omega t + \varphi)$$

Nei due casi si hanno rispettivamente le seguenti funzioni di trasferimento:

$$A_C(\Omega) := \frac{\max |V_C(t)|}{\max |V_{in}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \Omega^2}} \quad \text{e} \quad A_R(\Omega) := \frac{\max |V_R(t)|}{\max |V_{in}(t)|} = \frac{\tau \Omega}{\sqrt{1 + \tau^2 \Omega^2}}$$

ove il massimo va inteso rispetto al tempo. Nel primo caso si ha un comportamento passa-basso perché le alte frequenze vengono inibite, mentre nel secondo caso si ha un comportamento passa-alto perché vengono inibite le basse frequenze.

**Esempio 3.10.** Si consideri l'equazione del moto di un elemento di massa  $m$  vincolato a scorrere sull'asse  $x$ , sottoposto all'azione di una forza elastica di costante  $k > 0$  centrata nell'origine e di una forza esterna costante  $f(t) = f_0$  per  $t \in \mathbb{R}$ . L'equazione del moto è presto dedotta a partire dall'equazione di Newton, ovvero dalla seconda legge della dinamica, infatti:

$$m\ddot{x} = -kx + f_0 \implies \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{f_0}{m}$$

ove si è introdotta la pulsazione propria del sistema  $\omega := \sqrt{k/m}$ . Si vuole determinare l'integrale generale dell'equazione del moto: l'equazione caratteristica è  $\lambda^2 + \omega^2 = 0$  e ha le due radici complesse coniugate  $\lambda_{\pm} = \pm i\omega$ . L'integrale generale dell'omogenea è  $x_{om}(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$ . Un integrale particolare può essere cercato nella forma  $\bar{x}(t) = a$  con  $a$  costante reale da determinare sostituendo la soluzione  $\bar{x}$  all'equazione del moto:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \omega^2 \bar{x} = \frac{f_0}{m} \implies 0 + \omega^2 a = \frac{f_0}{m} \implies a = \frac{f_0}{m\omega^2}$$

L'integrale generale dell'equazione del moto è dato quindi da

$$x(t) = x_{om}(t) + \bar{x}(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{f_0}{m\omega^2}$$

**Esempio 3.11.** L'oscillatore armonico forzato. Si consideri il problema posto nell'Esempio 3.10 nel caso in cui la forza esterna oscilla sinusoidalmente  $f(t) = f_0 \cos(\Omega t + \varphi)$  per  $t \in \mathbb{R}$ , con  $\varphi \in \mathbb{R}$  e  $\Omega \in \mathbb{R}_+$  fissati. Si determina un'integrale particolare dell'equazione del moto. Per determinare l'integrale particolare della completa si distinguono due casi.

Caso 1. Assenza di risonanza:  $\Omega \neq \omega$ . Si cerca una soluzione particolare nella forma  $\bar{x}(t) = C \cos(\Omega t + \psi)$ . Sostituendo nella completa si ottiene

$$-\Omega^2 C \cos(\Omega t + \psi) + \omega^2 C \cos(\Omega t + \psi) = f_0 \cos(\Omega t + \varphi) \implies \begin{cases} \psi = \varphi \\ C = f_0 / (\omega^2 - \Omega^2) \end{cases} \implies \bar{x}(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t + \varphi)$$

Si osserva che con il tendere di  $\Omega$  a  $\omega$  l'ampiezza delle oscillazioni di pulsazione  $\Omega$  tende a divergere. Il secondo caso tratterà della situazione risonante.

Caso 2. Presenza di risonanza:  $\Omega = \omega$ . Si cerca una soluzione particolare nella forma  $\bar{x}(t) = Ct \cos(\omega t + \psi)$ . Sostituendo nella completa si ottiene

$$-2\omega C \sin(\omega t + \psi) - \omega^2 t C \cos(\omega t + \psi) + \omega^2 t C \cos(\omega t + \psi) = f_0 \cos(\omega t + \varphi) \implies \begin{cases} \psi = \varphi + \pi/2 \\ C = -f_0 / (2\omega) \end{cases}$$

Pertanto si ottiene l'integrale particolare dell'equazione del moto

$$\bar{x}(t) = -\frac{f_0}{2\omega} t \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{f_0}{2\omega} t \sin(\omega t + \varphi)$$

Si osserva che l'ampiezza delle oscillazioni cresce linearmente con il tempo e che le oscillazioni sono sfasate di novanta gradi rispetto alla forzante esterna.

Gli Esempi 3.9 e 3.11 mostrano che nel caso di termine noto sinusoidale è abbastanza agevole determinare un integrale particolare di un'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti. D'altro canto lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica abbastanza regolare permette di scrivere una funzione periodica come somma di componenti sinusoidali. Idea: se il termine noto è periodico lo si sviluppa in serie di Fourier, si risolvono le infinite equazioni differenziale ottenute ponendo come termine noto le singole componenti dello sviluppo di Fourier, si invoca la linearità dell'equazione di partenza per scrivere un suo integrale particolare sommando tutti gli integrali particolari così ottenuti.

Si considera, quindi, una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodica di periodo  $2L$  e si suppone che la sua restrizione all'intervallo  $[-L, L]$  soddisfi alle ipotesi del Teorema 2.2. Come al solito ci si limita a considerare il caso  $L = \pi$ , la generalizzazione al caso di periodo generico è immediata. Si considera, poi, l'equazione differenziale ordinaria di grado  $n$  lineare e a coefficienti costanti

$$d_n x^{(n)} + d_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + d_1 x^{(1)} + d_0 x = f(t) \quad (3.55)$$

ove  $d_i \in \mathbb{R}$  per  $i = 0, \dots, n$ . Si considera, ora, lo sviluppo in serie di Fourier (2.6) della funzione  $f$  e si determina una possibile collezione di funzioni  $\alpha_k$ , con  $k \geq 0$ , e  $\beta_k$ , con  $k \geq 1$ , in modo che siano soddisfatte le seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} d_n \alpha_0^{(n)} + \dots + d_1 \alpha_0^{(1)} + d_0 \alpha_0 = a_0 / \sqrt{2\pi} \\ d_n \alpha_k^{(n)} + \dots + d_1 \alpha_k^{(1)} + d_0 \alpha_k = (a_k / \sqrt{2\pi}) \cos kx & k \geq 1 \\ d_n \beta_k^{(n)} + \dots + d_1 \beta_k^{(1)} + d_0 \beta_k = (b_k / \sqrt{2\pi}) \sin kx & k \geq 1 \end{cases}$$

In virtù della linearità dell'equazione differenziale (3.55) si ha che la funzione definita mediante la seguente serie, supposta convergente,

$$\bar{x}(t) := \alpha_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k(t) + \beta_k(t)]$$

è soluzione dell'equazione differenziale (3.55).

**Esempio 3.12.** Si consideri il sistema oscillante introdotto nell'Esempio 3.10 e si supponga che la forza esterna  $f(t)$  sia periodica di periodo  $2\pi$  e che la sua restrizione all'intervallo  $[-\pi, \pi]$  sia  $f_0|t|$ , con  $f_0 \in \mathbb{R}$ . Si vuole determinare l'integrale generale dell'equazione del moto scegliendo le costanti in modo che  $k = 9m$  e  $f_0 = m$ . L'integrale generale dell'omogenea associata è  $x_{\text{om}}(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$ . Si sviluppa la funzione  $f(t)$  in serie di Fourier e si ottiene

$$\frac{1}{m} f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)t$$

Procedendo come nell'Esempio 3.10, per la prima componente dello sviluppo si trova che la corrispondente equazione differenziale  $\ddot{x} + 9x = \pi/2$  ha soluzione particolare  $\alpha(t) = \pi/18$ . Per la componente  $k$ -esima si ha l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + 9x = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{\omega_k^2} \cos \omega_k t$$

ove si è posto  $\omega_k := 2k + 1$  per ogni  $k \geq 0$ . Per la determinazione di un suo integrale particolare si procede come nell'Esempio 3.11 e si trova

$$\alpha_k(t) = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{\omega_k^2(9 - \omega_k^2)} \cos \omega_k t$$

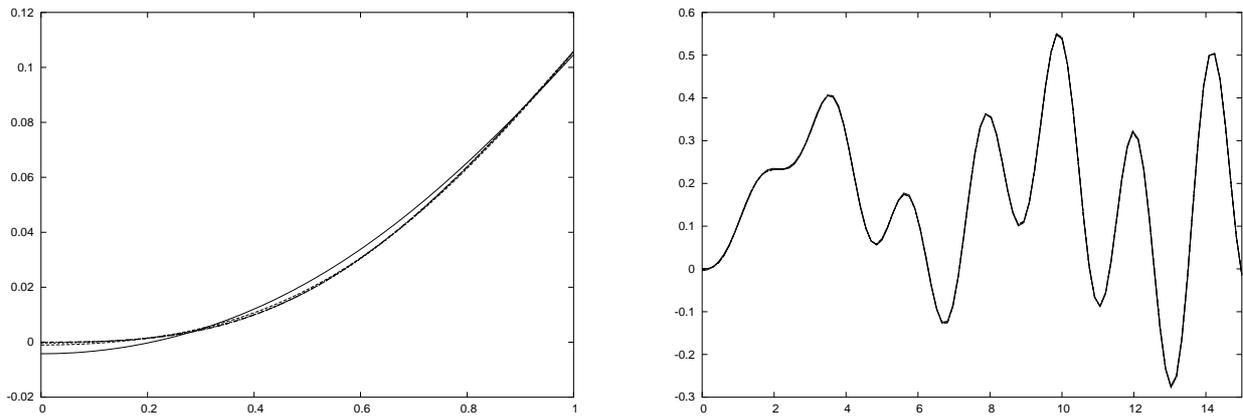


Fig. 3.13. A sinistra: grafico delle prime dieci somme parziali della soluzione (3.56). A parte la prima somma parziale le altre si schiacciano su una A destra: grafico della soluzione con sviluppo arrestato al decimo termine.

nel caso non risonante  $k \neq 1$ , ovvero  $k = 0, 2, 3, \dots$ . Mentre nel caso risonante  $k = 1$  si trova la soluzione particolare

$$\alpha_1(t) = -\frac{2}{27\pi} t \sin 3t$$

Invocando la linearità l'equazione del moto si ha che il suo integrale generale può essere scritto nella forma seguente:

$$x(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t + \frac{\pi}{18} - \frac{1}{2\pi} \cos t - \frac{2}{27\pi} t \sin 3t - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{[9 - (2k + 1)^2](2k + 1)^2} \cos(2k + 1)t \quad (3.56)$$

per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Se come condizione iniziale si suppone che l'elemento sia fermo nell'origine all'istante zero, ovvero  $x(0) = 0$  e  $x'(0) = 0$ , si trovano i coefficienti  $c_1 = -0.01956$  e  $c_2 = 0$ .

I termini presenti nella serie (3.56) hanno ampiezza che decresce rapidamente con l'indice di somma, quindi ci si aspetta che la soluzione esatta sia ben approssimata dai primi termini della serie. Nel riquadro di sinistra in Fig. 3.13 è stato riportato il grafico delle prime dieci somme parziali nell'intervallo  $[0, 1]$ : è abbastanza evidente che le somme parziali si schiacciano rapidamente su un'unica curva. Nel riquadro di destra in Fig. 3.13 è stato riportato il grafico della soluzione  $x(t)$  calcolata sommando i primi dieci termini della serie nell'intervallo  $[0, 15]$  in modo da avere un'idea del moto cui è sottoposto l'elemento. Si osserva, infine, che per  $t$  sufficientemente grande il termine dominante nella soluzione è quello risonante, ci si aspetta quindi che l'elemento compia oscillazioni di pulsazione 3 con ampiezza crescente linearmente; questo comportamento è messo in evidenza in Fig. 3.14 in cui la soluzione viene confrontata su diversi intervalli di tempo con una funzione proporzionale a  $\sin 3t$ .

**Esercizio 3.8.2.** Trave limitata. Si considera una trave unidimensionale limitata di lunghezza  $\pi$ , di modulo di Young  $E$ , di momento d'inerzia della sezione normale rispetto a un asse verticale centrale e poggiata a supporti elastici di costante  $k$ . La deflessione  $w(x)$  dalla posizione orizzontale soddisfa all'equazione differenziale del quarto ordine

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4}(x) + kw(x) = p(x) \quad (3.57)$$

ove  $p : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  è il carico cui è sottoposta la trave stessa, con condizioni ai limiti:

$$w(0) = w(\pi) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2 w}{dx^2}(0) = \frac{d^2 w}{dx^2}(\pi) = 0$$

Per determinare un integrale particolare della (3.57) si sviluppa in serie di Fourier di soli seni la funzione di carico

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sqrt{2\pi}} \sin nx \quad \text{ove} \quad b_n := 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} p(x) \sin nx \, dx$$

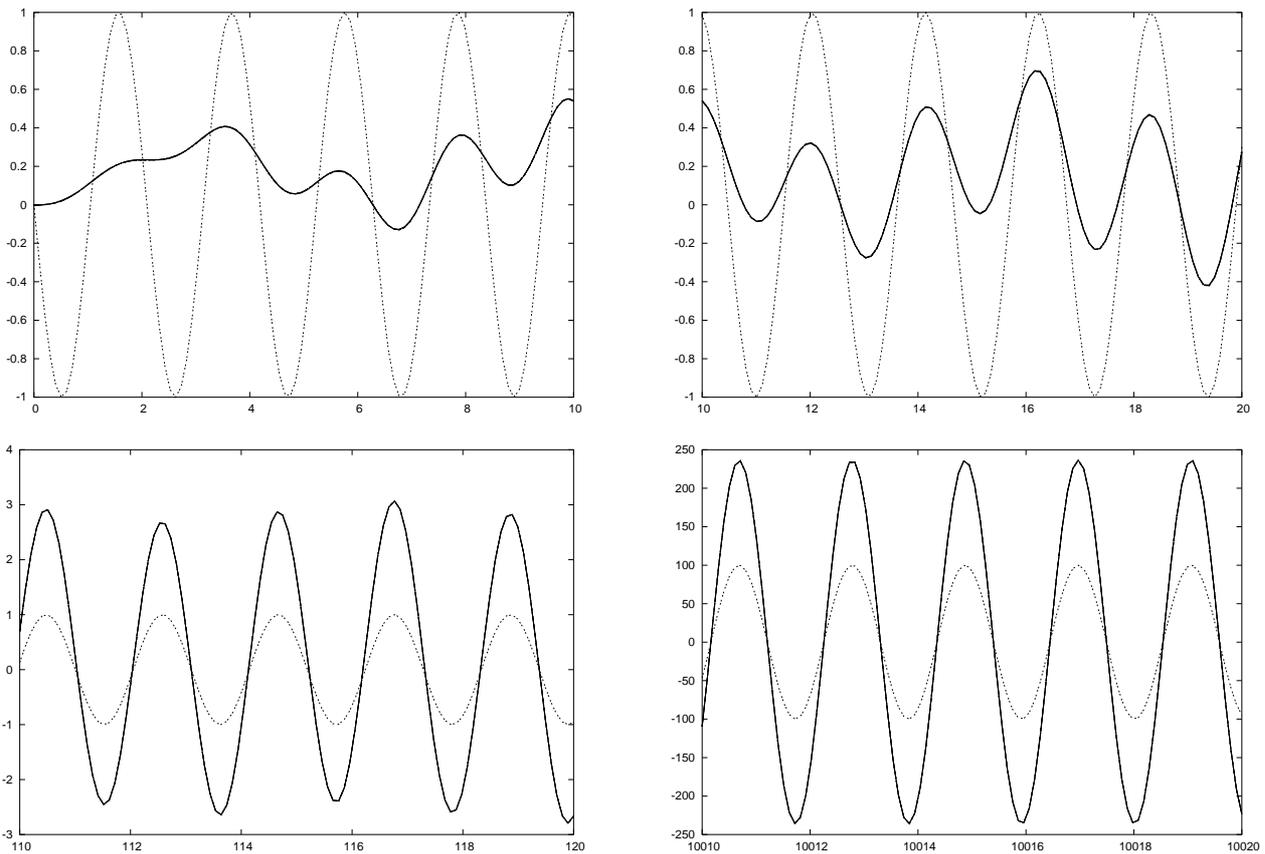


Fig. 3.14. Confronto tra la soluzione (3.56) e una funzione proporzionale a  $\sin 3t$  su diversi intervalli di tempo.

e si procede come da ricetta, ovvero si considera l'equazione differenziale con termine noto dato dalla componente  $n$ -esima dello sviluppo del carico:

$$EI \frac{dw}{dx}(x) + kw(x) = \frac{b_n}{\sqrt{2\pi}} \sin nx$$

Una soluzione particolare di tale equazione può essere cercata nella forma  $\alpha_n(x) = a \sin nx$ . Sostituendo nell'equazione precedente si ha

$$EI n^4 a \sin nx + ka \sin nx = \frac{b_n}{\sqrt{2\pi}} \sin nx \implies a = \frac{b_n}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k + EI n^4} \implies \alpha_n(x) = \frac{b_n}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k + EI n^4} \sin nx$$

In virtù della linearità dell'equazione (3.57) si ha che una sua soluzione particolare è nella forma

$$\bar{w}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k + EI n^4} \sin nx$$

Si considera, ora, il caso concreto in cui tutto il carico è concentrato nel punto medio della trave; si sceglie, quindi, la funzione  $p(x) = P\delta(x - \pi/2)$ ; si rimanda all'Appendice ?? per una rapida discussione sulla delta di Dirac. I coefficienti dello sviluppo sono dati da

$$b_n := 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin nx \, dx = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

E quindi il profilo della trave, il cui grafico al variare del rapporto  $EI/k$  è disegnato in Fig. 3.15, è dato dalla funzione

$$\bar{w}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{k + EI n^4} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \sin nx = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2P}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{k + EI(2s+1)^4} (-1)^s \sin(2s+1)x$$

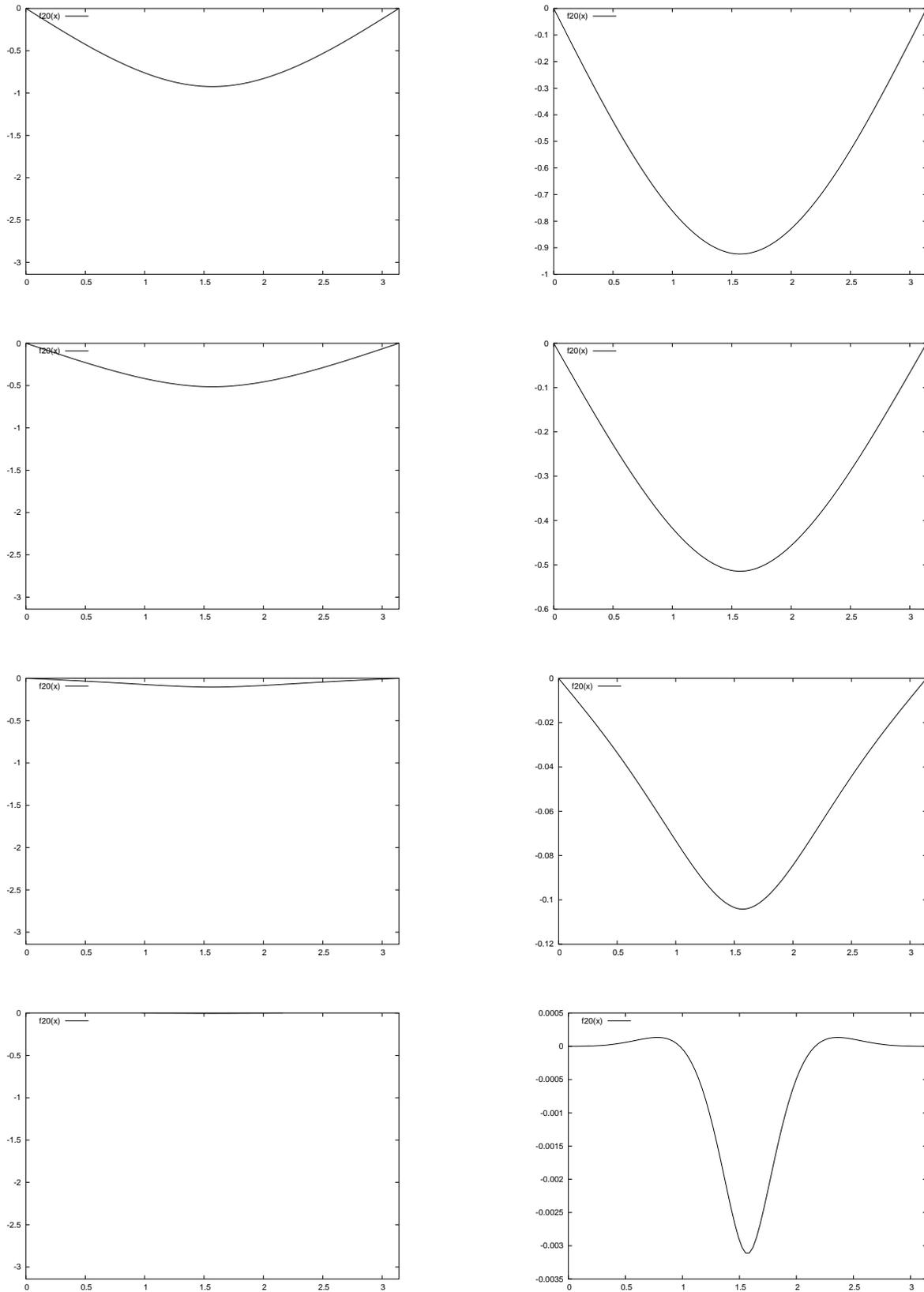
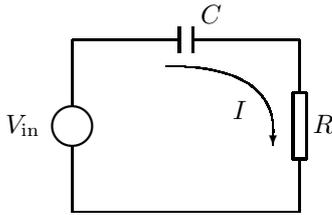


Fig. 3.15. Grafico del profilo della trave determinato nell'Esempio 3.8.2 al variare del rapporto  $k/EI$ . Tra i riquadri di sinistra e i corrispondenti riquadri di destra vi è la sola differenza della scala verticale. Dall'alto verso il basso le costanti sono state scelte in modo che  $k/EI = 0.1, 1, 10, 1000$ . Il profilo è stato disegnato considerando il suo sviluppo troncato al ventesimo ordine.

**Esercizio 3.8.3.** Si determini il potenziale ai capi del condensatore e quello ai capi della resistenza del circuito in figura con  $V_{in}(t)$  l'onda quadra di periodo  $2T$ , potenziale positivo  $+V_0$  e potenziale negativo  $-V_0$ , con  $V_0 \in \mathbb{R}_+^*$ .



Equazione del circuito:  $I = dq/dt$  e

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{1}{R}V_{in}(t)$$

ove  $C$  è la capacità del condensatore,  $R$  è la resistenza e  $q$  la carica sul condensatore.

Soluzione 3.8.3: posto  $\tau = RC$ , la costante di tempo del circuito, e  $\omega_k = (2k + 1)\pi/T$ , per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , si ha

$$V_R(t) = \beta e^{-t/\tau} + \frac{4V_0}{T} \sum_{k \geq 0} \left[ \frac{\tau}{1 + \omega_k^2 \tau^2} \cos \omega_k t + \frac{\omega_k \tau^2}{1 + \omega_k^2 \tau^2} \sin \omega_k t \right]$$

$$V_C(t) = \beta e^{-t/\tau} + \frac{4V_0}{T} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{\omega_k} \frac{\tau}{1 + \omega_k^2 \tau^2} [\sin \omega_k t - \omega_k \tau \cos \omega_k t]$$

ove  $\beta \in \mathbb{R}$  è una costante arbitraria dipendente dalle condizioni iniziali. Si osserva che nel primo caso si ha il comportamento passa alto, mentre nel secondo caso si ha quello passa basso.

**Esercizio 3.8.4.** Si consideri la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodica di periodo  $2\pi$  tale che  $f(t) = 0$  per ogni  $t \in [\pi, 2\pi]$  e  $f(t) = 1$  per ogni  $t \in [0, \pi)$ . Si determini un integrale particolare delle seguenti equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti:

$$1. y'' - y = f(t); \quad 2. y'' + y = f(t); \quad 3. y'' - 3y' + 2y = f(t).$$

**Esercizio 3.8.5.** Si consideri la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodica di periodo  $2\pi$  tale che  $f(t) = |t|$  per ogni  $t \in [-\pi, \pi]$ . Si determini un integrale particolare delle seguenti equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti:

$$1. y'' - y = f(t); \quad 2. y'' + 4y = f(t).$$

**Esercizio 3.8.6.** Si consideri il circuito  $RC$  dell'Esempio 3.8.3, si denoti con  $q$  la carica sul condensatore, con  $V_C$  la tensione ai capi del condensatore e con  $V_R$  quella ai capi della resistenza  $R$ . L'equazione del circuito è  $\dot{q} + q/\tau = V_{in}(t)/R$  ove  $\tau = RC$ . *i)* Si determinino le funzioni di trasferimento  $A(\omega) := |\widehat{V}_C(\omega)/\widehat{V}_{in}(\omega)|$  e  $B(\omega) := |\widehat{V}_R(\omega)/\widehat{V}_{in}(\omega)|$ . *ii)* Si risolva il circuito nel caso

$$V_{in}(t) = \begin{cases} 0 & |t| > 1 \\ V_0 & |t| < 1 \\ V_0/2 & |t| = 1 \end{cases}$$

Soluzione 3.8.6: *i)*  $A(\omega) = 1/\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$ ,  $B(\omega) = \omega \tau / \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$ . La carica  $q(t)$  è data da

$$q(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ V_0 C [1 - e^{-(t+1)/\tau}] & -1 < t \leq +1 \\ 2V_0 C \sinh(1/\tau) e^{-t/\tau} & t > +1 \end{cases}$$

**Esercizio 3.8.7.** Si consideri un elemento di massa  $m$  in moto su una retta individuata dal versore  $\hat{x}$ , sottoposta all'azione di una forza elastica di costante  $k > 0$ , di una resistiva del tipo  $-b\dot{x}\hat{x}$ , con  $b > 0$ , e di una forzante esterna  $\vec{F}(t) = f(t)\hat{x}$  con

$$f(t) = \begin{cases} f_0 e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -f_0 e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases}$$

con  $f_0 \in \mathbb{R}$  e  $\alpha > 0$ . Si determini la soluzione dell'equazione del moto con condizioni iniziali  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{x}(t) = 0$  nel caso  $\sqrt{k/m} > b/m$ . Si studino i limiti  $b \rightarrow 0$  e  $k \rightarrow 0$ .

Soluzione 3.8.7: si pone  $\Omega = \sqrt{k/m}$  e  $\beta = b/m$ , allora

$$x(t) = -\frac{f_0}{m} \frac{1}{\Omega^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2} e^{\alpha t}$$

per  $t \leq 0$  e

$$x(t) = \frac{f_0}{m} \frac{1}{\Omega^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2} e^{-\alpha t} - \frac{2f_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\Omega^2 - \beta^2}(\Omega^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2)(\Omega^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2)} e^{-\beta t} \times$$

$$\left[ \sqrt{\Omega^2 - \beta^2}(\Omega^2 + \alpha^2) \cos \sqrt{\Omega^2 - \beta^2} t - \beta^2(\Omega^2 - \alpha^2) \cos \left( \sqrt{\Omega^2 - \beta^2} t + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

per  $t > 0$ .

#### 4. Operatori differenziali nello spazio tridimensionale

Sia  $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ ; nel seguito  $u$  denota un campo scalare di  $C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$  e  $\vec{v}$  un campo vettoriale di  $C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ . Si definiscono i seguenti operatori differenziali:

1. grad,  $\nabla : u \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}) \rightarrow \text{gradu} = \nabla u \in C^0(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  tale che

$$\nabla u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z)\hat{x} + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z)\hat{y} + \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z)\hat{z} \quad (4.2)$$

2. div,  $\nabla \cdot : \vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \rightarrow \text{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} \in C^0(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$  tale che

$$\nabla \cdot \vec{v}(x, y, z) = \frac{\partial v_x}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial v_y}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial v_z}{\partial z}(x, y, z) \quad (4.3)$$

3. rot,  $\nabla \times : \vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \rightarrow \text{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} \in C^0(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  tale che

$$\nabla \times \vec{v}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left[ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \vec{x} - \left[ \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] \vec{y} + \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \vec{z} \quad (4.4)$$

4.  $\nabla^2$ ,  $\Delta : u \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}) \rightarrow \nabla^2 u = \Delta u \in C^0(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$  tale che

$$\nabla^2 u \equiv \Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, y, z) \quad (4.5)$$

5. con abuso di notazione si definisce il Laplaciano su un vettore,  $\nabla^2$ ,  $\Delta : \vec{v} \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \rightarrow \nabla^2 \vec{v} = \Delta \vec{v} \in C^0(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  tale che

$$\nabla^2 \vec{v} \equiv \Delta \vec{v}(x, y, z) = \Delta v_x(x, y, z)\vec{x} + \Delta v_y(x, y, z)\vec{y} + \Delta v_z(x, y, z)\vec{z} \quad (4.6)$$

Segue un teorema che stabilisce alcune importanti identità che coinvolgono gli operatori differenziali appena definiti.

**Teorema 4.2** *Siano  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  e  $u \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ ; si hanno le seguenti identità:*

1.  $\nabla \cdot (u\vec{v}) = \nabla u \cdot \vec{v} + u \nabla \cdot \vec{v}$ ;
2.  $\nabla \times (u\vec{v}) = u \nabla \times \vec{v} + \nabla u \times \vec{v}$ .

Segue un teorema che stabilisce alcuni importanti risultati relativi all'applicazione successiva degli operatori differenziali definiti in precedenza.

**Teorema 4.3** Siano  $\vec{v} \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  e  $u \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ ; si hanno le seguenti identità:

1.  $\nabla \cdot \nabla u = \Delta u$ ;
2.  $\nabla \times \nabla u = 0$ ;
3.  $\nabla \cdot \nabla \times \vec{v} = 0$ ;
4.  $\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) + \Delta \vec{v}$ .

In alcune applicazioni è di grande utilità conoscere la forma degli operatori differenziali in termini di coordinate differenti da quelle cartesiane. Un caso di grande interesse è costituito dalle coordinate cilindriche:  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  e  $\zeta \in \mathbb{R}$  definite dalle relazioni seguenti

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ \zeta = z \end{cases} \quad (4.7)$$

Si denota con  $\{\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{\zeta}\}$  la base naturale associata al sistema di coordinate cilindriche e, dato un vettore  $\vec{v}$ , con  $v_r$ ,  $v_\varphi$  e  $v_\zeta$  le componenti di  $\vec{v}$  sulla base naturale cilindrica. Si ottengono le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} \\ \nabla u &= \frac{\partial u}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \hat{\zeta} \\ \Delta u &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Un altro caso interessante è quello delle coordinate polari (sferiche):  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  e  $\vartheta \in (0, \pi)$  definite dalle relazioni seguenti

$$\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \zeta = r \cos \vartheta \end{cases} \quad (4.9)$$

Si denota con  $\{\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{\vartheta}\}$  la base naturale associata al sistema di coordinate polari e, dato un vettore  $\vec{v}$ , con  $v_r$ ,  $v_\varphi$  e  $v_\vartheta$  le componenti di  $\vec{v}$  sulla base naturale polare. Si ottengono le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta v_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \\ \nabla u &= \frac{\partial u}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \hat{\vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \\ \Delta u &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

**Esercizio 4.1.2.** Sia  $u \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$  tale che  $u(x, y, z) = f(r(x, y, z))$  ove  $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  e  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Si dimostri che

$$\nabla u(x, y, z) = \frac{df}{dr} \frac{\vec{r}}{r}$$

ove  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ .

**Esercizio 4.1.3.** Sia  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  tale che  $\vec{v}(x, y, z) = \vec{r}f(r(x, y, z))$  ove  $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  e  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ . Si dimostri che

$$\nabla \cdot \vec{v}(x, y, z) = 3f(r) + r \frac{df}{dr}(r) = 3f(r(x, y, z)) + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \frac{df}{dr}(r(x, y, z))$$

Si applichi il risultato precedente al caso del campo elettrico generato da una carica puntiforme  $q$ :

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

**Esercizio 4.1.4.** Si dimostri il Teorema 4.2.

**Esercizio 4.1.5.** Sia  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  tale che  $\vec{v}(x, y, z) = \vec{r}f(r(x, y, z))$  ove  $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  e  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ . Si usino i risultati del Teorema 4.2 per dimostrare che  $\nabla \times \vec{v} = 0$ . Si applichi questo risultato al caso del campo elettrico generato da una carica puntiforme.

**Esercizio 4.1.6.** Si dimostri il Teorema 4.3.

**Esercizio 4.1.7.** Si considerino le equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.11)$$

ove  $\rho$  e  $\vec{J}$  sono, rispettivamente, la densità di carica e di corrente. A partire dalle equazioni (4.11) nel vuoto, ovvero nel caso  $\rho = 0$  e  $\vec{J} = 0$ , e usando i risultati del Teorema 4.3, si dimostri che la propagazione del campo elettromagnetico è descritta dall'equazione di d'Alambert (equazione delle onde)

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.12)$$

ove  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ .

**Esercizio 4.1.8.** Si ricavano le espressioni (4.8) e (4.10).

**Esercizio 4.1.9.** Si consideri il moto di un elemento in  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $\vec{v}$  la velocità e  $\vec{a}$  l'accelerazione. Si dimostri che se si usano coordinate cilindriche si ha:

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} & a_r &= \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \\ v_\phi &= r\dot{\phi} & a_\phi &= r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} \\ v_z &= \dot{z} & a_z &= \ddot{z} \end{aligned}$$

**Esercizio 4.1.10.** Si consideri il campo di forze

$$\vec{F} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \hat{x} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{y}$$

Si scriva  $\vec{F}$  in coordinate cilindriche. Usando tale rappresentazione si risponda alle seguenti domande:

1. si calcoli il rotore del campo  $\vec{F}$ ;
2. si calcoli il lavoro fatto da  $\vec{F}$  sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine, appartenente al piano  $xy$  e percorsa una volta in verso antiorario;

3. che relazione esiste tra i risultati dei due punti precedenti?

**Esercizio 4.1.11.** Si consideri il moto di un elemento in  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $\vec{v}$  la velocità e  $\vec{a}$  l'accelerazione. Si dimostri che se si usano coordinate polari si ha:

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} & a_r &= \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \\ v_{\vartheta} &= r\dot{\vartheta} & a_{\vartheta} &= r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - r \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 \\ v_{\varphi} &= r \sin \vartheta \dot{\varphi} & a_{\varphi} &= r \sin \vartheta \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \sin \vartheta \dot{\varphi} + 2r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \end{aligned}$$

**Esercizio 4.1.12.** Si consideri il campo di forze

$$\vec{F} = \frac{2P \cos \vartheta}{r^3} \hat{r} + \frac{P}{r^3} \sin \vartheta \hat{\vartheta}$$

espresso in coordinate polari nella regione  $r \geq P \in \mathbb{R}_+^*$ . Si risponda alle seguenti domande:

1. si calcoli il rotore del campo  $\vec{F}$ ;
2. si calcoli il lavoro fatto da  $\vec{F}$  sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine, appartenente al piano  $xy$  e percorsa una volta in verso antiorario;
3. se si ritiene che il campo sia conservativo se ne calcoli il potenziale.

## 5. Equazioni alle derivate parziali del primo ordine

Questo capitolo è dedicato agli esercizi sulle equazioni alle derivate parziali del primo ordine risolti usando il metodo delle caratteristiche.

### 5.2. PDE lineari e semilineari

**Esercizio 5.2.2.** Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale alle derivate parziali  $\partial u / \partial x = 1$  e l'unica superficie integrale che attraversa la curva  $u(0, y) = \exp\{-y^2\}$ . Si verifichi che la soluzione ottenuta soddisfa sia l'equazione che la condizione iniziale.

Soluzione 5.2.2:  $u(x, y) = x + \Phi(y)$  con  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x, y) = x + \exp\{-y^2\}$ .

**Esercizio 5.2.3.** Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

e l'unica superficie integrale che attraversa la curva  $u(x, 0) = x$ . Si verifichi che la soluzione ottenuta soddisfa sia l'equazione che la condizione iniziale.

Soluzione 5.2.3:  $u(x, y) = \Phi(2x - y)$  con  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x, y) = (2x - y)/2$ .

**Esercizio 5.2.4.** Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = z$$

e l'unica superficie integrale che attraversa la curva  $u(x, 0) = f(x)$  con  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Si verifichi che la soluzione ottenuta soddisfa sia l'equazione che la condizione iniziale.

Soluzione 5.2.4:  $u(x, y) = \Phi((x^2 - y^2)/2)/|x - y|$  con  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  arbitraria.

**Esercizio 5.2.5.** Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

e l'unica superficie integrale che attraversa la curva  $u(x, x) = f(x)$  con  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Si verifichi che la soluzione ottenuta soddisfa sia l'equazione che la condizione iniziale.

Soluzione 5.2.5:  $u(x, y) = x\Phi(xy)$  con  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  arbitraria.

**Esercizio 5.2.6.** Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = xu$$

e l'unica superficie integrale che attraversa la curva  $u(0, y) = f(y)$  con  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Si verifichi che la soluzione ottenuta soddisfa sia l'equazione che la condizione iniziale.

Soluzione 5.2.6:  $u(x, y) = \exp\{x^2/2\}\Phi(y \exp\{-x\})$  con  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  arbitraria.

**Esercizio 5.2.7.** Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali alle derivate parziali:

- i)  $\partial u/\partial x + \partial u/\partial y = u$ ;
- ii)  $2\partial u/\partial x - 3\partial u/\partial y = x$ ;
- iii)  $\partial u/\partial x - 2\partial u/\partial y = \sin x + y - u$ ;
- iv)  $\partial u/\partial x - \partial u/\partial y = 2u + e^{2x} \cos 3y$ .

Soluzione 5.2.7: i)  $u(x, y) = e^x \Phi(x - y)$ , ii)  $u(x, y) = \Phi(3x + 2y) + x^2/4$ , iii)  $u(x, y) = (\sin x - \cos x)/2 + y + 2 + e^{-x} \Phi(2x + y)$ , iv)  $u(x, y) = -(e^{2x}/2) \sin 3y + e^{2x} \Phi(x + y)$  con  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Esercizio 5.2.8.** Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy:

- i)  $\partial u/\partial x + \partial u/\partial y = 1$  con curva iniziale  $u(x, 0) = e^x$ ;
- ii)  $\partial u/\partial x + \partial u/\partial y = u$  con curva iniziale  $u(x, 2x) = 1 + \cos x$ ;
- iii)  $\partial u/\partial x + \cos x \partial u/\partial y = \sin x$  con curva iniziale  $u(0, y) = y - 1 + \cos y$ ;
- iv)  $2\partial u/\partial x - 5\partial u/\partial y = -4u + x^2$  con curva iniziale  $u(0, y) = \sin y + e^y + 1/8$ ;
- v)  $x\partial u/\partial x - y\partial u/\partial y = x - u$  con curva iniziale  $u(x, x) = x^2$ ;
- vi)  $y\partial u/\partial x - x\partial u/\partial y = -xu$  con curva iniziale di equazione  $u = y$  e  $x^2 + 2y^2 = 4$ ;
- vii)  $y\partial u/\partial x - x\partial u/\partial y = -2xyu$  con curva iniziale di equazione  $u = e^x \sin(1 + x)$  e  $y^2 = 2x + 1$ .

Soluzione 5.2.8: i)  $u(x, y) = y + e^{x-y}$ ; ii)  $u(x, y) = e^{2x-y}[1 + \cos(x - y)]$ ; iii)  $u(x, y) = -\cos x + \cos[\sin x - y] - \sin x + y$ ; iv)  $u(x, y) = e^{-2x} \sin[(5x + 2y)/2] + e^{(x+y)/2} + x^2/2 - x/4 + 1/8$ ; v)  $u(x, y) = x/2 + x^{1/2}y^{3/2} - y/2$ ; vi)  $u(x, y) = e^y \sqrt{4 - x^2 - y^2} \exp\{-\sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$ ; vii)  $u(x, y) = \exp\{-y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}\} \sin \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Esercizio 5.2.9.** Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = xy$$

e l'unica superficie integrale che attraversa la curva  $u(0, y) = f(y)$  con  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Si verifichi che la soluzione ottenuta soddisfa sia l'equazione che la condizione iniziale.

Soluzione 5.2.9:  $u(x, y) = \sin x - x \cos x + x^2(y - \sin x)/2 + \Phi(y - \sin x)$  con  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x, y) = \sin x - x \cos x + x^2(y - \sin x)/2 + f(y - \sin x)$ .

### 5.3. PDE quasilineari

**Esercizio 5.3.2.** Si consideri l'equazione differenziale alle derivate parziali quasi-lineare

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2(x + y)$$

i) Si verifichi che la superficie  $\Sigma$  di equazione  $u(x, y) = x^2 + y^2$  è una superficie integrale; ii) si determini la caratteristica passante per l'origine e si verifichi che appartiene alla superficie integrale  $\Sigma$ .

**Esercizio 5.3.3.** Si consideri l'equazione differenziale alle derivate parziali quasi-lineare

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2(x + y)$$

*i)* Se ne determini la superficie integrale generale; *ii)* si determini la superficie integrale che attraversa la curva di equazione  $x^2 + y^2 = 1$  e  $u = 0$ .

Soluzione 5.3.3:  $u(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ .

**Esercizio 5.3.4.** Si consideri l'equazione differenziale alle derivate parziali quasi-lineare

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = -\cos x$$

*i)* se ne determini la curva caratteristica passante per  $(0, 1, 0)$  e si disegni la sua proiezione sul piano  $xy$ ; *ii)* si dica in corrispondenza di quali tra le seguenti condizioni iniziali il problema di Cauchy risulta ben posto: *a)*  $u(x, 2x) = -\cos x$ , *b)*  $u(x, 3x) = -\sin x$ , *c)*  $u(x, 2x) = -\sin x$ ; *iii)* si determini la soluzione dei problemi di Cauchy ben posti del punto precedente.

Soluzione 5.3.4: 1.  $x(s) = s$ ,  $y(s) = 2s + 1$ ,  $z(s) = -\sin s$ ; 2. b; 3.  $u(x, y) = -\sin x$ .

**Esercizio 5.3.5.** Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$(y - u)\frac{\partial u}{\partial x} + (u - x)\frac{\partial u}{\partial y} = x - y$$

e l'unica superficie integrale che attraversa la curva  $u = 0$  e  $xy = 1$ . Si verifichi che la soluzione ottenuta soddisfa sia l'equazione che la condizione iniziale.

Soluzione 5.3.5:  $x + y + u = \Phi(x^2 + y^2 + z^2)$  con  $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x, y) = (1 - xy)/(x + y)$ .

**Esercizio 5.3.6.** Si determini l'integrale dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + v \left( 1 - 2\frac{\varrho}{\hat{\varrho}} \right) \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0$$

ove  $v$  è la velocità massima raggiunta dalle autovetture e  $\hat{\varrho}$  è la loro densità massima, nella regione  $t \geq 0$ , con curva iniziale

$$\varrho(0, x) = \begin{cases} \hat{\varrho} & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Soluzione 5.3.6: la superficie integrale soluzione del problema di Cauchy ha curve parametriche

$$t(\tau, s) = s, \quad x(\tau, s) = \begin{cases} -vs + \tau & \tau < 0 \\ +vs + \tau & \tau > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \varrho(\tau, s) = \begin{cases} \hat{\varrho} & \tau < 0 \\ 0 & \tau > 0 \end{cases} \quad \forall \tau, s \in \mathbb{R}$$

**Esercizio 5.3.7.** Si risolva il problema analogo a quello posto nell'Esercizio 5.3.6 con condizione iniziale  $\varrho(0, x) = (\hat{\varrho}/2)(1 - \tanh \mu x)$ , con  $\mu \in \mathbb{R}$ . Si discuta il comportamento della soluzione per  $\mu$  grande.

Soluzione 5.3.7:  $x = vt(1 - 2\varrho/\hat{\varrho}) + (1/2\mu) \log[(\hat{\varrho}/\varrho)(1 - \varrho/\hat{\varrho})]$ .

**Esercizio 5.3.8.** Si risolva il problema analogo a quello posto nell'Esercizio 5.3.6 con condizione iniziale

$$\varrho(0, x) = \begin{cases} \varrho_0 & x < 0 \\ \varrho_0(L - x)/L & 0 < x < L \\ 0 & x > L \end{cases}$$

con  $\varrho_0 \in (0, \hat{\varrho})$  e  $L > 0$ . Si discuta il comportamento della soluzione.

**Esercizio 5.3.9.** Si risolva il problema analogo a quello posto nell'Esercizio 5.3.6 con condizione iniziale

$$\varrho(0, x) = \begin{cases} \hat{\varrho}/5 & x < 0 \\ 3\hat{\varrho}/5 & x > 0 \end{cases}$$

Si discuta il comportamento della soluzione.

## 6. Equazioni alle derivate parziali del secondo ordine

Il problema su cui vertono gli esercizi di questo paragrafo consiste nella determinazione di una funzione  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , di classe  $C^2$  in un dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$ , che soddisfi ad un'equazione alle derivate parziali del tipo

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0. \quad (6.2)$$

La funzione  $u$  si dirà soluzione o integrale della (6.2). Nello studio di problemi fisici si ha bisogno di condizioni al contorno generali: condizioni di Dirichlet, viene assegnata la funzione  $u$  su parte della frontiera del dominio  $D$ ; condizioni di Neumann, viene assegnata la derivata di  $u$  nella direzione normale alla frontiera di  $D$  su parte della frontiera stessa.

In realtà lo studio è limitato alle equazioni del secondo ordine quasi-lineari, ovvero a quelle equazioni nella forma seguente:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y)u + G(x, y) = 0$$

ove le funzioni  $A, B, C, D, E, F, G : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sono abbastanza regolari in  $\Omega$ .

### 6.2. Classificazione e forma canonica

**Esercizio 6.2.2.** Si determini il tipo dell'equazione  $y^2 \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$  studiando gli autovalori della matrice parte principale.

Soluzione 6.2.2: ellittica in  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ , iperbolica in  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$ , parabolica in  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ .

**Esercizio 6.2.3.** Si determini il tipo dell'equazione  $y^2 \partial^2 u / \partial x^2 + 2xy \partial^2 u / \partial x \partial y + x^2 \partial^2 u / \partial y^2 = 0$  studiando gli autovalori della matrice parte principale.

Soluzione 6.2.3: parabolica in  $\mathbb{R}^2$ .

**Esercizio 6.2.4.** Si determini il tipo dell'equazione seguente:  $(x+a) \partial^2 u / \partial x^2 + 2xy \partial^2 u / \partial x \partial y - y^2 \partial^2 u / \partial y^2 = 0$  con  $a \in (-1/4, 1/4)$ .

Soluzione 6.2.4: ellittica in  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \text{ e } -(1 + \sqrt{1-4a})/2 < x < (-1 + \sqrt{1-4a})/2\}$ , iperbolica in  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, x < -(1 + \sqrt{1-4a})/2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, x > (-1 + \sqrt{1-4a})/2\}$ , parabolica altrove.

**Esercizio 6.2.5.** Si dimostri che l'equazione seguente è parabolica in tutto  $\mathbb{R}^2$  e se ne scriva la forma canonica:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$$

con  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $b, c \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 6.2.6.** Si dimostri che l'equazione seguente è iperbolica in tutto  $\mathbb{R}^2$  e se ne scriva la forma canonica:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$$

con  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $b, c \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 6.2.7.** Si dimostri che l'equazione seguente è ellittica in tutto  $\mathbb{R}^2$  e se ne scriva la forma canonica:

$$2a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$$

con  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $b, c \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 6.2.8.** Si studi il tipo delle seguenti equazioni differenziali quasi-lineari e, qualora possibile, se ne determini la forma canonica:

- |  |   |
|--|---|
| 1. $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ ;                                | 2. $u_{xx} + yu_{yy} = 0$ ;                                     |
| 3. $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$ ;               | 4. $y u_{xx} + x u_{yy} = 0$ ;                                  |
| 5. $xu_{xx} + yu_{yy} = 0$ ;                               | 6. $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$ ;                                    |
| 7. $u_{xx} \operatorname{sign} y + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ ; | 8. $u_{xx} + 2u_{xy} + (1 - \operatorname{sign} y)u_{yy} = 0$ ; |
| 9. $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$ ;                         | 10. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$ ;                             |
| 11. $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0$ ;                        | 12. $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$ ;                             |
| 13. $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0$ ;            | 14. $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$ .                 |

### 6.3. Alcuni semplici esempi preliminari

**Esercizio 6.3.2.** Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{in } D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, -\infty < y < +\infty\}$$

con condizioni di Dirichelet  $u(0, y) = y^2$  e  $u(1, y) = 1$ .

Soluzione 6.3.2:  $u(x, y) = x(1 - y^2) + y^2$ .

**Esercizio 6.3.3.** Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6xy \quad \text{in } D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, -\infty < y < +\infty\}$$

con condizioni di miste Dirichelet–Neumann  $u(0, y) = y$  e  $\partial u / \partial x(1, y) = 0$ .

Soluzione 6.3.3:  $u(x, y) = x^3 y - 3xy + y$ .

**Esercizio 6.3.4.** Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x \quad \text{in } D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

con condizioni di Dirichelet  $u(0, y) = 0$  e  $u(x, 0) = x^2$ .

Soluzione 6.3.4:  $u(x, y) = x^2(1 + y)$ .

### 6.4. Equazione di Laplace: funzioni armoniche

Si dice che una funzione  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  è armonica se e solo se è soluzione dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \tag{6.3}$$

ovvero  $\Delta u \equiv \nabla^2 u = 0$ . Applicazioni fisiche: il potenziale elettrostatico e la temperatura di equilibrio in un solido sono regolate dall'equazione di Laplace.

**Esercizio 6.4.2.** Sia  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\gamma$  la curva regolare con supporto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$  percorsa una sola volta in senso antiorario; si calcoli l'integrale  $\int_\gamma u \, dl$  di  $u$  lungo la curva  $\gamma$  nei seguenti casi:

1.  $u(x, y) = xy$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 2)$ ,  $r = 4$ ;

2.  $u(x, y) = e^x \cos y$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ,  $r = 1$ ;
3.  $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ,  $r = 1/2$ ;
4.  $u(x, y) = x + y$ ,  $(x_0, y_0) = (1, -1)$ ,  $r = 5$ .

Suggerimento: si usino le proprietà delle funzioni armoniche.

**Esercizio 6.4.3.** Sia  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $r \in \mathbb{R}_+$ ,  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $B \equiv \mathcal{B}((x_0, y_0), r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$ ; si calcoli l'integrale  $\int \int_{\overline{B}} u(x, y) dx dy$  di  $u$  esteso alla regione  $\overline{B}$  nei seguenti casi:

1.  $u(x, y) = xy$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 2)$ ,  $r = 4$ ;
2.  $u(x, y) = e^x \cos y$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ,  $r = 1$ ;
3.  $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ,  $r = 1/2$ ;
4.  $u(x, y) = x + y$ ,  $(x_0, y_0) = (1, -1)$ ,  $r = 5$ .

Suggerimento: si usino le proprietà delle funzioni armoniche.

**Esercizio 6.4.4.** Sia  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $B \equiv \mathcal{B}((0, 0), 1) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ . Si determinino il massimo e il minimo della funzione  $u$  nella regione  $\overline{B}$  nei seguenti casi: *i*)  $u(x, y) = xy$ ; *ii*)  $u(x, y) = x^2 - y^2$ ; *iii*)  $u(x, y) = e^x \cos y$ . Si risolva lo stesso problema per la funzione  $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$  in  $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$ .

### 6.5. Equazione di Laplace: dominio rettangolare

**Esercizio 6.5.2.** Si risolva l'equazione (6.3) nella regione  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  con condizioni di Dirichelet  $u(0, y) = u(a, y) = 0$  per ogni  $y \in [0, b]$ ,  $u(x, 0) = \sin(3\pi x/a)$  e  $u(x, b) = 0$  per ogni  $x \in [0, a]$ .

Soluzione 6.5.2:  $u(x, y) = \sinh(3\pi(b - y)/a) \sin(3\pi x/a) / \sinh(3\pi b/a)$ .

**Esercizio 6.5.3.** Si risolva l'equazione (6.3) nella regione  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  con condizioni di Dirichelet  $u(0, y) = u(a, y) = 0$  per ogni  $y \in [0, b]$ ,  $u(x, 0) = f(x)$ , con  $f \in C^\infty([0, a])$  tale che  $f(0) = f(a) = 0$ , e  $u(x, b) = 0$  per ogni  $x \in [0, a]$ .

Soluzione 6.5.3: posto  $\varphi_n(x) = \sqrt{2/a} \sin(n\pi x/a)$  e  $\langle \varphi_n, f \rangle = \int_0^a dx f(x) \varphi_n(x)$ , si ha

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(n\pi(b - y)/a)}{\sinh(n\pi b/a)} \langle \varphi_n, f \rangle \sin n \frac{\pi}{a} x$$

**Esercizio 6.5.4.** Si risolva l'equazione (6.3) nella regione  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  con condizioni di Dirichelet  $u(0, y) = u(a, y) = 0$  per ogni  $y \in [0, b]$ ,  $u(x, 0) = \sin(\pi x/a)$  e  $u(x, b) = \sin(3\pi x/a)$  per ogni  $x \in [0, a]$ .

Soluzione 6.5.4:

$$u(x, y) = (\sinh(\pi(b - y)/a) / \sinh(\pi b/a)) \sin(\pi x/a) + (\sinh(3\pi y/a) / \sinh(3\pi b/a)) \sin(3\pi x/a)$$

**Esercizio 6.5.5.** Si risolva l'esercizio (6.5.4) come sovrapposizione dei due problemi seguenti:  $\nabla^2 u_1 = 0$  con condizioni di Dirichelet  $u_1(0, y) = u_1(a, y) = 0$  per ogni  $y \in [0, b]$ ,  $u_1(x, 0) = \sin(\pi x/a)$  e  $u_1(x, b) = 0$  per ogni  $x \in [0, a]$ ;  $\nabla^2 u_2 = 0$  con condizioni di Dirichelet  $u_2(0, y) = u_2(a, y) = 0$  per ogni  $y \in [0, b]$ ,  $u_2(x, 0) = 0$  e  $u_2(x, b) = \sin(3\pi x/a)$  per ogni  $x \in [0, a]$ .

**Esercizio 6.5.6.** Esempio di condizioni non omogenee. Si risolva l'equazione (6.3) nella regione  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  con condizioni di Dirichelet  $u(0, y) = 0$  e  $u(a, y) = V$  per ogni  $y \in [0, b]$ ,  $u(x, 0) = u(x, b) = Vx/a$  per ogni  $x \in [0, a]$ .

Soluzione 6.5.6: (suggerimento:  $v(x, y) = u(x, y) - Vx/a$ )  $u(x, y) = Vx/a$ , la soluzione non dipende da  $b$  quindi vale anche in una striscia infinita di larghezza  $a$  (condensatore a facce piane parallele).

**Esercizio 6.5.7.** Esempio di condizioni non omogenee. Si risolva l'equazione (6.3) nella regione  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, -b/2 \leq y \leq b/2\}$  con condizioni di Dirichelet  $u(0, y) = 0$  e  $u(a, y) = V$  per ogni  $y \in [-b/2, b/2]$ ,  $u(x, -b/2) = u(x, b/2) = V(x/a)^2$  per ogni  $x \in [0, a]$ .

Soluzione 6.5.7: (suggerimento:  $v(x, y) = u(x, y) - Vx/a$ )

$$u(x, y) = \frac{8V}{\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\pi - 1}{n^3 \sin(n\pi b/a)} \left[ \cosh\left(n\frac{\pi}{a}y\right) \sinh\left(n\frac{\pi}{a}\frac{b}{2}\right) \right] \sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right) + V\frac{x}{a}$$

la soluzione dipende da  $b$ , ma nel limite  $b \rightarrow \infty$  il primo addendo converge uniformemente a zero (condensatore a facce piane parallele).

**Esercizio 6.5.8.** Il condensatore piano a facce parallele. Si risolva l'equazione (6.3) nella regione  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, -\infty \leq y \leq +\infty\}$  con condizioni di Dirichelet  $u(0, y) = 0$  e  $u(a, y) = V$  per ogni  $y \in \mathbb{R}$ .

Soluzione 6.5.8: (suggerimento:  $u(x, y) = X(x)$ )  $u(x, y) = Vx/a$ .

**Esercizio 6.5.9.** Si risolva l'equazione (6.3) nella regione  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  con condizioni di Dirichelet  $u(0, y) = u(a, y) = 0$  per ogni  $y \in [0, b]$ ,  $u(x, 0) = 0$  e  $u(x, b) = V$  per ogni  $x \in (0, a)$ . Si verifichi che la soluzione è simmetrica rispetto all'asse  $x = a/2$ , ovvero  $u(x, y) = u(a - x, y)$  per ogni  $(x, y) \in D$  (suggerimento: si ricorda che per ogni  $n \geq 1$  intero si ha  $\sin[n(\pi - \alpha)] = (-1)^{n+1} \sin n\alpha$ ).

Soluzione 6.5.9:  $u(x, y) = (2V/\pi) \sum_{n \geq 1} [(1 - \cos n\pi)/n \sinh(n\pi b/a)] \sinh(n\pi y/a) \sin(n\pi x/a)$ .

**Esercizio 6.5.10.** Si risolva l'equazione (6.3) nella regione  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$  con condizioni di Dirichelet  $u(0, y) = 0$  per ogni  $y \in [0, \pi]$ ,  $u(\pi, y) = V$  per ogni  $y \in (0, \pi)$ ,  $u(x, 0) = 0$  per ogni  $y \in [0, \pi]$ ,  $u(x, \pi) = V$  per ogni  $y \in (0, \pi)$ . Si verifichi che la soluzione è simmetrica rispetto alla retta  $y = x$ , ovvero  $u(x, y) = u(y, x)$  per ogni  $(x, y) \in D$ .

Soluzione 6.5.10:

$$u(x, y) = (2V/\pi) \sum_{n \geq 1} [(1 - \cos n\pi)/n \sinh(n\pi)] [\sinh(ny) \sin(nx) + \sinh(nx) \sin(ny)]$$

**Esercizio 6.5.11.** Si risolva l'equazione (6.3) in  $D := [0, \pi] \times [0, \pi]$  con condizioni  $u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0$  per ogni  $y \in [0, \pi]$  e  $u(x, 0) = 0$  e  $u(x, \pi) = f(x)$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ , con  $f$  di classe  $C^\infty$  (le pareti  $x = 0$  e  $x = \pi$  sono isolate termicamente).

Soluzione 6.5.11: si trova

$$u(x, y) = a_0 y/2\pi + \sum_{n \geq 1} a_n [\sinh(ny)/\sinh(n\pi)] \cos(nx)$$

con  $a_n = (2/\pi) \int_0^\pi dx f(x) \cos nx$  per ogni  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Esercizio 6.5.12.** Si risolva l'equazione (6.3) nella regione  $D := [0, \pi] \times [0, b]$  con condizioni  $u_y(x, 0) = 0$  e  $u(x, b) = 0$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ ,  $u(0, y) = 0$  e  $u(\pi, y) = A$  per ogni  $y \in (0, \pi)$ .

Soluzione 6.5.12:  $u(x, y) = (A/\pi)[x + 2 \sum_{n \geq 1} ((-1)^n/n) (\cosh(ny)/\cosh(nb)) \sin(nx)]$ .

**Esercizio 6.5.13.** Si risolva l'equazione (6.3) nella regione  $D := [0, a] \times [0, b]$ , con  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ , con le seguenti condizioni al bordo:

1.  $u_x(0, y) = 0, u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 1;$
2.  $u_x(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = 0, u(x, b) = 1;$
3.  $u_y(x, 0) = u(x, b) = u(a, y) = 0, u(0, y) = 1;$
4.  $u(0, y) = 1, u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 0;$
5.  $u_y(x, 0) = u_y(x, b) = 0, u(0, y) = u(a, y) = 1;$
6.  $u(0, y) = u(x, 0) = 1, u_x(a, y) = u_y(x, b) = 0;$
7.  $u(0, y) = u(a, y) = 1, u_y(x, 0) = u(x, b) = 0;$
8.  $u(0, y) = u(x, 0) = 1, u(a, y) = u(x, b) = 0;$

**Esercizio 6.5.14.** *i*) Si determini la distribuzione stazionaria di temperatura  $u(x, y)$  nella lamina metallica quadrata  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$  con condizioni al bordo

$$\begin{cases} u(0, y) = \frac{4y}{\pi^2}(y - \pi), & u(\pi, y) = \frac{4y}{\pi^2}(\pi - y) & \forall y \in [0, \pi] \\ u(x, 0) = 0, & u(x, \pi) = 0 & \forall x \in [0, \pi] \end{cases}$$

ii) Si faccia uno schizzo delle isoterme e si calcoli la temperatura sul segmento di equazione  $x = \pi/2$ . iii) Si risolva l'equazione

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0$$

nella regione

$$E := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\pi, -\xi \leq \eta \leq \xi\} \cup \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \leq \xi \leq \sqrt{2}\pi, \xi - \sqrt{2}\pi \leq \eta \leq \sqrt{2}\pi - \xi\}$$

con condizioni al bordo

$$\left\{ \begin{array}{l} u(\xi, \xi) = \frac{4}{\pi^2} \xi(2\xi - \sqrt{2}\pi) \quad \forall \xi \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}\pi] \\ u(\xi, \xi - \sqrt{2}\pi) = \frac{4}{\pi^2} \xi(\sqrt{2}\pi - 2\xi) \quad \forall \xi \in [\frac{\sqrt{2}}{2}\pi, \sqrt{2}\pi] \\ u(\xi, -\xi) = 0 \quad \forall \xi \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}\pi] \\ u(\xi, \sqrt{2}\pi - \xi) = 0 \quad \forall \xi \in [\frac{\sqrt{2}}{2}\pi, \sqrt{2}\pi], \end{array} \right.$$

riconducendosi al problema posto al punto i) mediante un opportuno cambiamento di variabili.

iv) Si risolva l'equazione

$$2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (6.4)$$

per la funzione  $v(x, y)$  nella regione  $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, (x - \pi)/2 \leq y \leq x/2\}$  con condizioni al bordo

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, y) = \frac{8}{\pi^2} y(2y + \pi) \quad \forall y \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ u(\pi, y) = \frac{8}{\pi^2} y(\pi - 2y) \quad \forall y \in [0, \pi/2] \\ u(x, x/2) = u(x, (x - \pi)/2) = 0 \quad \forall x \in [0, \pi] \end{array} \right.$$

Suggerimento: si determini un cambiamento di variabili che porti in forma canonica l'equazione (6.4).

### 6.6. Equazione di Laplace: dominio a simmetria cilindrica

**Esercizio 6.6.2.** Si risolva l'equazione (6.3) nella regione  $D := [1, b] \times [0, \pi]$  con condizioni di Dirichlet  $u(\varrho, 0) = u(\varrho, \pi) = 0$  per ogni  $\varrho \in [1, b]$ ,  $u(1, \varphi) = 0$  e  $u(b, \varphi) = V$  per ogni  $\varphi \in [0, \pi]$ .

Soluzione 6.6.2:  $u(x, y) = (2V/\pi) \sum_{n \geq 1} [(1 - \cos n\pi)/n(b^n - b^{-n})](\varrho^n - \varrho^{-n}) \sin(n\varphi)$ .

**Esercizio 6.6.3.** Condensatore cilindrico. Si risolva l'equazione (6.3) nella regione  $D := [a, b] \times [-\pi, \pi]$  con condizioni  $u(a, \varphi) = 0$  e  $u(b, \varphi) = V$  per ogni  $\varphi \in [0, \pi]$ ,  $u(\varrho, -\pi) = u(\varrho, \pi)$  e  $u_\varphi(\varrho, -\pi) = u_\varphi(\varrho, \pi)$  (condizioni periodiche sulla funzione e sulla derivata rispetto a  $\varphi$  nella coordinata  $\varphi$ ).

Soluzione 6.6.3: si risolva l'esercizio in due modi  $u(\varrho, \varphi) = R(\varrho)$  e  $u(\varrho, \varphi) = R(\varrho)\Phi(\varphi)$ , si ottiene  $u(\varrho, \varphi) = V \log(\varrho/a) / \log(b/a)$ .

**Esercizio 6.6.4.** Si risolva l'equazione (6.3) nella regione  $D := [0, a] \times [0, \pi]$  con condizioni  $u(a, \varphi) = f(\varphi)$  per ogni  $\varphi \in [0, \pi]$ , con  $f \in C^\infty([0, \pi])$ , e  $u_\varphi(\varrho, 0) = u_\varphi(\varrho, \pi) = 0$  per ogni  $\varrho \in [0, a]$  (le pareti  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \pi$  sono isolate termicamente).

Soluzione 6.6.4: posto  $\psi_0(\varphi) = 1/\sqrt{\pi}$ ,  $\psi_n(\varphi) = \sqrt{2/\pi} \cos n\varphi$ , per  $n \geq 1$ , e inoltre  $\langle \psi_n, f \rangle = \int_0^\pi d\varphi f(\varphi) \psi_n(\varphi)$  per  $n \geq 0$ , la soluzione si scrive

$$u(\varrho, \varphi) = \langle \psi_0, f \rangle \psi_0(\varphi) + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\varrho}\right)^n \langle \psi_n, f \rangle \psi_n(\varphi) \quad .$$

**Esercizio 6.6.5.** Si risolva l'equazione (6.3) nella regione  $D := [1, b] \times [0, \pi/2]$  con condizioni  $u(1, \varphi) = 0$  per ogni  $\varphi \in [0, \pi/2]$ ,  $u(b, \varphi) = f(\varphi)$  per ogni  $\varphi \in [0, \pi/2]$ , con  $f \in C^\infty([0, \pi])$ , e  $u_\varphi(\varrho, 0) = u_\varphi(\varrho, \pi/2) = 0$  per ogni  $\varrho \in [1, b]$  (le pareti  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \pi$  sono isolate termicamente).

Soluzione 6.6.5:  $u(\varrho, \varphi) = a_0 \log \varrho/2 \log b + \sum_{n \geq 1} a_n [(\varrho^{2n} - \varrho^{-2n}) / (b^{2n} - b^{-2n})] \cos 2n\varphi$ , ove i coefficienti  $a_n$  sono dati da  $a_n = (4/\pi) \int_0^{\pi/2} d\varphi f(\varphi) \cos 2n\varphi$  per ogni  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Esercizio 6.6.6.** Si risolva l'equazione (6.3) nella regione  $D := [0, a] \times [0, \alpha]$  ( $\alpha < \pi$ ) con condizioni  $u(\varrho, 0) = u(\varrho, \alpha) = 0$  per ogni  $\varrho \in [0, a]$ ,  $u(a, \varphi) = f(\varphi)$  per ogni  $\varphi \in [0, \alpha]$ , con  $f \in C^\infty([0, \alpha])$ .

Soluzione 6.6.6:  $u(\varrho, \varphi) = \sum_{n \geq 1} a_n (\varrho/a)^{n\pi/\alpha} \sin(n\pi\varphi/\alpha)$ , con  $a_n = (2/\alpha) \int_0^\alpha d\varphi f(\varphi) \sin(n\pi\varphi/\alpha)$  per ogni  $n = 1, 2, \dots$

### 6.7. Equazione di Helmholtz

**Esercizio 6.7.2.** Si risolva l'equazione agli autovalori per l'operatore laplaciano nel piano, ovvero si determinino  $E \in \mathbb{R}$  e  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$  e  $u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$  per ogni  $x \in [0, \pi]$  e  $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$  per ogni  $y \in [0, \pi]$ , tali che  $\Delta u(x, y) = Eu(x, y)$ .

Soluzione 6.7.2:  $E = -(n^2 + m^2)$  per ogni  $n, m \in \mathbb{N}^*$  e  $u_{n,m}(x, y) = \sin(nx) \sin(my)$ .

**Esercizio 6.7.3.** Sia  $E \in \mathbb{R}$ , si risolva  $\Delta u = Eu$  in  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$  con condizioni al bordo  $u(x, 0) = 0$  e  $u(x, \pi) = \sin x$  per ogni  $x \in [0, \pi]$  e  $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$  per ogni  $y \in [0, \pi]$ .

Soluzione 6.7.3: la soluzione assume forma diversa a seconda del valore del numero reale  $E$ ; si ha:

$$u(x, y) = \begin{cases} \sin(\sqrt{|E+1|}y) \sin x / \sin(\sqrt{|E+1|}\pi) & E < -1 \\ (1/\pi)y \sin x & E = -1 \\ \sinh(\sqrt{E+1}y) \sin x / \sinh(\sqrt{E+1}\pi) & E > -1 \end{cases}$$

### 6.8. Equazione delle onde: corda illimitata

Si dice che una grandezza fisica  $u = u(\vec{x}, t)$ , con  $\vec{x} = (x, y, z)$ , ha un comportamento ondulatorio se e solo se la sua evoluzione è descritta dall'equazione di d'Alambert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, z, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, z, t) = 0 \quad (6.5)$$

ovvero  $\Delta u - \partial^2 u / \partial t^2 = 0$ . Nel seguito si vedranno problemi al contorno relativi all'equazione (6.5) in dimensione uno.

Date due funzioni  $u_0, v_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sufficientemente regolari, sia  $D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$  si dimostra che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in D \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (6.6)$$

ammette l'unica soluzione

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x - ct) + u_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds \quad (6.7)$$

detta soluzione di d'Alambert.

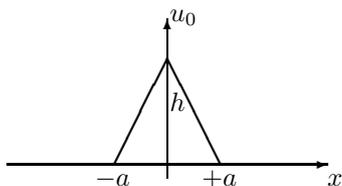
**Esercizio 6.8.2.** Si ricavi la soluzione di d'Alambert (6.7) per il problema di Cauchy (6.6).

**Esercizio 6.8.3.** Si scriva l'unica soluzione del problema di Cauchy (6.6) nei casi seguenti:

1.  $u_0(x) = 2 \sin x \cos x, v_0(x) = \cos x$ ;
2.  $u_0(x) = x \sin x, v_0(x) = \cos 2x$ ;
3.  $u_0(x) = 1/(1+x^2), v_0(x) = e^x$ ;
4.  $u_0(x) = e^{-x}, v_0(x) = 1/(1+x^2)$ ;
5.  $u_0(x) = \cos(\pi x/2), v_0(x) = \sinh(ax)$  con  $a \in \mathbb{R}$ ;
6.  $u_0(x) = \sin 3x, v_0(x) = \sin 2x - \sin x$ .

Soluzione 6.8.3: riporto la soluzione dei primi due problemi: 1.  $u(x, t) = \sin 2x \cos(4ct) + (1/2c) \cos x \sin(2ct)$ ;  
 2.  $u(x, t) = x \sin x \cos(3ct) + 3ct \cos x \sin(3ct) + (1/6c) \cos 2x \sin(6ct)$ .

**Esercizio 6.8.4.** La corda illimitata è eccitata dalla condizione iniziale  $u_0(x)$  in figura e  $v_0(x) = 0$ . Le costanti reali  $h$  e  $a$  sono positive.



Si disegni il profilo ottenuto come unica soluzione del problema di Cauchy (6.6) agli istanti di tempo

$$t_k = k \frac{a}{4c}$$

per  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

**Esercizio 6.8.5.** La corda illimitata è eccitata dalla condizione iniziale sulla velocità  $v_0(x) = 0$  e dal profilo iniziale

$$u_0(x) = \begin{cases} h(a^2 - x^2)/a^2 & |x| \leq a \\ 0 & |x| \geq a \end{cases}$$

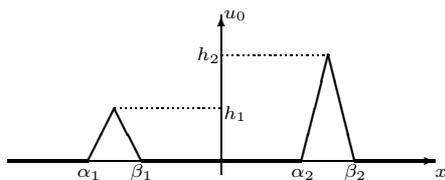
con  $a, h \geq 0$ . Si determini il profilo al tempo  $t \geq 0$  e la legge del moto dell'elemento della corda di ascissa  $x \in \mathbb{R}$ .  
 Soluzione 6.8.5: vanno distinti due casi. Nel caso  $t \geq a/c$  si ha

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -ct - a \\ h[a^2 - (x + ct)^2]/(2a^2) & -ct - a \leq x < -ct + a \\ 0 & -ct + a \leq x < ct - a \\ h[a^2 - (x - ct)^2]/(2a^2) & ct - a \leq x < ct + a \\ 0 & ct + a \leq x < +\infty \end{cases}$$

mentre nel caso  $0 \leq t \leq a/c$  si ha

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -ct - a \\ h[a^2 - (x + ct)^2]/(2a^2) & -ct - a \leq x < ct - a \\ h[1 - (x^2 + c^2 t^2)/a^2] & ct - a \leq x < -ct + a \\ h[a^2 - (x - ct)^2]/(2a^2) & -ct + a \leq x < ct + a \\ 0 & ct + a \leq x < +\infty \end{cases}$$

**Esercizio 6.8.6.** La corda illimitata è eccitata dalla condizione iniziale  $u_0(x)$  in figura e  $v_0(x) = 0$ . Le costanti reali  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, h_1, h_2$  sono positive.



Si determini in quale punto e in quale istante la deviazione della corda risulta massima. Si determini il valore massimo della deviazione.

Soluzione 6.8.6: deviazione massima  $(h_1 + h_2)/2$ , all'istante  $t = [\alpha_2 - \alpha_1 + \beta_2 - \beta_1]/(4c)$  e alla posizione  $x = [\alpha_2 + \alpha_1 + \beta_2 + \beta_1]/4$ .

**Esercizio 6.8.7.** Al segmento  $-a \leq x \leq +a$ , con  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , di una corda illimitata con profilo iniziale  $u_0(x) = 0$  è trasmessa la velocità costante  $v_0$ . All'esterno di tale segmento la velocità iniziale è nulla. Si determini il profilo della corda all'istante  $t \geq 0$  e si disegni tale profilo agli istanti  $t_k = ka/(4c)$  con  $k = 0, 2, 4, 6$ .

**Esercizio 6.8.8.** All'istante iniziale una corda illimitata riceve nel punto  $x = 0$  un colpo trasversale che le trasmette impulso  $I$ . Si giustifichi la scelta  $v_0(x) = (I/\rho)\delta(x)$ , ove  $\rho$  è la densità di massa della corda, e si determini il profilo della corda all'istante  $t \geq 0$  supponendo  $u_0(x) = 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Soluzione 6.8.8: fisso  $t \geq 0$ ,  $u(x, t) = I/(2\rho c)$  per le ascisse  $x$  tali che  $-ct < x < ct$  e  $u(x, t) = 0$  zero altrove.

**Esercizio 6.8.9.** Si risolva il problema di Cauchy  $u(x, 0) = u_0(x)$  e  $u_t(x, 0) = v_0(x)$  per la seguente equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine quasi-lineare:

$$\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

con  $\alpha = 2V$ ,  $\beta = V^2 - g\tau/\rho$  e le costanti  $V, \rho, g, \tau \in \mathbb{R}_+^*$ .

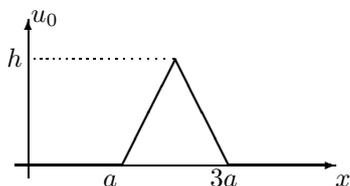
Soluzione 6.8.9: posto  $\lambda_1 = -\beta/[V + \sqrt{g\tau/\rho}]$  e  $\lambda_2 = -\beta/[V - \sqrt{g\tau/\rho}]$  si ha

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} [\lambda_1 u_0(x + \lambda_1 t) - \lambda_2 u_0(x + \lambda_2 t)] + \frac{1}{2c} \int_{x+\lambda_1 t}^{x+\lambda_2 t} v_0(s) ds$$

### 6.9. Equazione delle onde: corda semi-illimitata

Nel caso della corda semi-limitata con estremo fisso nell'origine e con profili iniziali  $u_0(x)$  e  $v_0(x)$  dati sulla semiretta  $x \geq 0$ , la soluzione di d'Alambert continua a essere valida purché  $u_0$  e  $v_0$  vengano prolungati per disparità a tutto  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 6.9.2.** La corda semi-illimitata fissata nell'origine è eccitata dalla condizione iniziale  $u_0(x)$  in figura e  $v_0(x) = 0$ . Le costanti reali  $h$  e  $a$  sono positive.



Si disegni il profilo ottenuto come unica soluzione del problema di Cauchy agli istanti di tempo

$$t_1 = \frac{a}{c}, \quad t_2 = \frac{3a}{2c}, \quad t_3 = \frac{2a}{c} \quad \text{e} \quad t_4 = \frac{7a}{2c}$$

**Esercizio 6.9.3.** Una corda semi-illimitata con estremo fisso nell'origine riceve all'istante  $t = 0$  un colpo trasversale che trasmette alla corda impulso  $I$  sul tratto  $0 \leq x \leq 2\ell$  in modo che il profilo iniziale della velocità in  $[0, 2\ell]$  sia una semionda sinusoidale. Si determini il profilo della corda  $u(x, t)$  per  $t \geq 0$  supponendo che  $u(x, 0) = 0$  per ogni  $x \geq 0$ .

Soluzione 6.9.3: si pone  $A = -\pi I/(4\ell)$ ; per  $0 < x < 2\ell$  si ha il profilo

$$u(x, t) = \begin{cases} -[2A\ell/(\pi c)] \sin[\pi x/(2\ell)] \sin[ct/(2\ell)] & 0 < t < (2\ell - x)/c \\ +[2A\ell/(\pi c)] \cos^2[\pi(x - ct)/(4\ell)] & (2\ell - x)/c < t < (2\ell + x)/c \\ 0 & (2\ell + x)/c \leq t < +\infty \end{cases}$$

e per  $2\ell < x, +\infty$  si ha

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < (-2\ell + x)/c \\ +[2A\ell/(\pi c)] \cos^2[\pi(x - ct)/(4\ell)] & (-2\ell + x)/c < t < (2\ell + x)/c \\ 0 & (2\ell + x)/c \leq t < +\infty \end{cases}$$

**Esercizio 6.9.4.** Una corda semi-illimitata con estremo fisso nell'origine riceve all'istante  $t = 0$  un colpo trasversale che trasmette alla corda impulso  $I$  nel punto  $x_0$ . Si determini il profilo della corda  $u(x, t)$  per  $t \geq 0$  supponendo che  $u(x, 0) = 0$  per ogni  $x \geq 0$ .

Soluzione 6.9.4: si definisce la funzione  $\theta$  di Heaviside

$$\theta(y) = \begin{cases} 0 & -\infty < y < 0 \\ 1 & 0 < y < +\infty \end{cases} \quad (6.8)$$

Allora la soluzione può essere posta nella forma:  $u(x, t) = [I/(2c\rho)]\{\theta(x - x_0 + ct) - \theta(x - x_0 - ct) - \theta(x + x_0 + ct) + \theta(x + x_0 - ct)\}$ .

**Esercizio 6.9.5.** Si risolva l'Esercizio 6.9.4 supponendo che l'impulso iniziale  $I$  sia trasmesso ai punti  $x_n > x_{n-1} > \dots > x_1 > 0$ .

Soluzione 6.9.5: ricordando la definizione (6.8) la soluzione può essere posta nella forma:

$$u(x, t) = \frac{I}{2c\rho} \sum_{k=1}^n \{\theta(x - x_k + ct) - \theta(x - x_k - ct) - \theta(x + x_k + ct) + \theta(x + x_k - ct)\}$$

### 6.10. Equazione delle onde: corda e sbarra limitata

L'equazione di d'Alambert su  $D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \ell, t \geq 0\}$  descrive diversi fenomeni oscillatori:

1. piccole oscillazioni di una corda tesa di lunghezza e densità a riposo  $\ell$  e  $\rho$  e tensione  $\tau$ . In questo caso la velocità di fase dell'equazione delle onde è  $c = \sqrt{\tau/\rho}$ . Condizioni ai limiti sensate sono condizioni di Cauchy

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad \forall x \in [0, \ell] \quad (6.9)$$

e condizioni di Dirichelet

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

che traducono l'ipotesi fisica che gli estremi della corda siano fissi.

2. Oscillazioni longitudinali di una sbarra con estremi liberi e con modulo di Young  $E$  e densità  $\rho$ . In questo caso la velocità di fase è  $c = \sqrt{E/\rho}$ . Condizioni ai limiti sensate, oltre alle ovvie condizioni di Cauchy (6.9), sono le condizioni di Neumann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

che significano assenza di forze esterne agenti sugli estremi liberi della sbarra.

3. Nelle stesse ipotesi del punto precedente, se gli estremi sono fissati rigidamente le condizioni ai limiti da usare sono di Dirichelet:

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

4. Nelle stesse ipotesi del punto precedente, se gli estremi sono fissati elasticamente le condizioni ai limiti da usare sono miste:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - hu(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) + hu(\ell, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

ove  $h = k/(ES)$ ,  $E$  modulo di Young della sbarra,  $S$  sezione trasversale,  $k$  modulo di Young dell'estremo.

**Esercizio 6.10.2.** Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{in } D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, t > 0\}$$

con condizioni di Dirichelet–Neumann  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  per ogni  $t > 0$ ,  $u(x, 0) = \sin x$  e  $\partial u / \partial t(x, 0) = 0$ .

Soluzione 6.10.2:  $u(x, t) = \sin x \cos ct$ .

**Esercizio 6.10.3.** Come l'Esercizio 6.10.2, con condizioni Dirichelet–Neumann  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  per ogni  $t > 0$ ,  $\partial u / \partial t(x, 0) = 0$  e

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ -x + \pi & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

Soluzione 6.10.3:  $u(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} [4(-1)^k / \pi(2k+1)^2] \sin(2k+1)x \cos(2k+1)ct$ .

**Esercizio 6.10.4.** Come l'Esercizio 6.10.2, con condizioni Dirichelet–Neumann  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  per ogni  $t > 0$ ,  $u(x, 0) = 0$  e  $\partial u / \partial t(x, 0) = b \sin x$ , con  $b \in \mathbb{R}$ .

Soluzione 6.10.4:  $u(x, t) = (b/c) \sin x \sin ct$ .

**Esercizio 6.10.5.** Come l'Esercizio 6.10.2, con condizioni Dirichelet–Neumann  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  per ogni  $t > 0$ ,  $u(x, 0) = 0$  e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq x_0 - a \\ bx/a + (a - x_0)b/a & x_0 - a \leq x \leq x_0 \\ -bx/a + (a + x_0)b/a & x_0 \leq x \leq x_0 + a \\ 0 & x_0 + a \leq x \leq \pi \end{cases},$$

con  $x_0 \in (0, \pi)$  e  $a \in \mathbb{R}$  tale che  $0 < a \leq \min(x_0, \pi - x_0)$ .

Soluzione 6.10.5:  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} [4 \sin nx_0 (1 - \cos na) / \pi a c n^3] \sin nx \cos nct$ , si noti che l'ampiezza dell'armonica  $n$ -esima decade come  $1/n^3$ .

**Esercizio 6.10.6.** Si risolva il problema di Cauchy (6.9) per la corda limitata di lunghezza  $\pi$  e con estremi fissi nei seguenti casi

1.  $u_0(x) = 0, v_0(x) = 1$ ;
2.  $u_0(x) = 1, v_0(x) = 0$ ;
3.  $u_0(x) = 3hx/(2\pi)$  se  $0 \leq x \leq 2\pi/3$ ,  $u_0(x) = 3h(\pi - x)/\pi$  se  $2\pi/3 \leq x \leq \pi$ ,  $v_0(x) = 0$ ;
4.  $u_0(x) = \sin^3 x, v_0(x) = 0$ ;
5.  $u_0(x) = \sin x, v_0(x) = 0$  se  $0 \leq x \leq \pi/4$ ,  $v_0(x) = a$  se  $\pi/4 < x < 3\pi/4$ , e anche  $v_0(x) = 0$  se  $3\pi/4 \leq x \leq \pi$ ;

Soluzione 6.10.6: 1.  $u(x, t) = [4/(c\pi)] \sum_{n \geq 1} [1/(2n-1)^2] \sin[(2n-1)x] \sin[(2n-1)ct]$ .

2.  $u(x, t) = [4/\pi] \sum_{n \geq 1} [1/(2n-1)] \sin[(2n-1)x] \sin[(2n-1)ct]$ .

3.  $u(x, t) = [9h/\pi^2] \sum_{n \geq 1} [1/n^2] \sin(2n\pi/3) \sin(nx) \sin(nct)$ .

4.  $u(x, t) = [3/4] \sin x \cos(ct) - [1/4] \sin(3x) \cos(3ct)$ .

5.  $u(x, t) = \sin x \cos(ct) + [4a/(c\pi)] \sum_{n \geq 1} [(-1)^n / (2n-1)^2] \sin[(2n-1)\pi/4] \sin(nx) \sin(nct)$ .

**Esercizio 6.10.7.** Si confrontino, risolvendo il problema di Cauchy (6.9) in  $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \ell, t \geq 0\}$ , le vibrazioni dei seguenti strumenti a corda:

1. arpa:  $u_0(x) = \beta x/a$  se  $0 \leq x \leq a$ ,  $u_0(x) = \beta(\ell - x)/(\ell - a)$  se  $a \leq x \leq \ell$ ,  $v_0(x) = 0$ ;
2. pianoforte:  $u_0(x) = 0, v_0(x) = \mu$  se  $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon, v_0(x) = 0$  altrove, con  $\varepsilon \ll 1$ ;
3. violino:  $u_0(x) = 0$  e  $v_0(x) = 4\beta c(\ell - x)/\ell^2$ .

Soluzione 6.10.7: per l'arpa si ottiene

$$u(x, t) = \frac{2\beta\ell^2}{\pi^2 a(\ell - a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \left[ \frac{n\pi a}{\ell} \right] \sin \left[ \frac{n\pi x}{\ell} \right] \sin \left[ \frac{n\pi ct}{\ell} \right]$$

Per il pianoforte si trova:

$$u(x, t) = \frac{4\mu\ell}{\pi^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \left[ \frac{n\pi\varepsilon}{\ell} \right] \sin \left[ \frac{n\pi a}{\ell} \right] \sin \left[ \frac{n\pi x}{\ell} \right] \sin \left[ \frac{n\pi ct}{\ell} \right]$$

Per il violino si trova:

$$u(x, t) = \frac{8\beta}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \left[ \frac{n\pi x}{\ell} \right] \sin \left[ \frac{n\pi ct}{\ell} \right]$$

**Esercizio 6.10.8.** Un corda di lunghezza  $\ell$  con estremi fissati rigidamente è perturbata da un colpo di un martelletto acuto che le trasferisce impulso  $I$  nel punto  $x_0$ . Trovare la deviazione della corda  $u(x, t)$  se la deviazione iniziale è nulla.

Soluzione 6.10.8:  $u(x, t) = [2I/(\pi\rho c)] \sum_{n \geq 1} \sin(n\pi x_0/\ell) \sin(n\pi x/\ell) \sin(n\pi ct/\ell)$ .

**Esercizio 6.10.9.** Propagazione ondosa in un mezzo dispersivo. Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{in } D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, t > 0\}$$

ove  $0 < \beta < 2/c$ , con condizioni di Dirichelet–Neumann  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  per ogni  $t > 0$ ,  $u(x, 0) = \sin x$  e  $\partial u/\partial t(x, 0) = 0$ .

Soluzione 6.10.9:  $u(x, t) = \exp\{-\beta c^2 t/2\} [\cos(\delta t/2) + (\beta c^2/\delta) \sin(\delta t/2)] \sin x$ , ove si è posto  $\delta = \sqrt{\beta^2 c^4 - 4c^2}$ .

**Esercizio 6.10.10.** Propagazione ondosa forzata. Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \sin \omega t \quad \text{in } D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, t > 0\}$$

ove  $A, \omega \in \mathbb{R}$ , con condizioni di Dirichelet–Neumann  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  per ogni  $t > 0$ ,  $u(x, 0) = 0$  e  $\partial u/\partial t(x, 0) = 0$ .

Soluzione 6.10.10:  $\omega_n = n\pi c/a$ , se esiste  $N$  tale che  $\omega_N = \omega$  (condizione di risonanza) allora la soluzione è data da

$$u(x, t) = \frac{4Ac^2}{\pi} \sum_{\substack{n \geq 1, n \neq N \\ n \text{ dispari}}} \frac{1}{n(\omega_n^2 - \omega^2)} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \sin n \frac{\pi}{a} x + \frac{2Ac^2}{N\omega\pi} \left( \frac{1}{\omega} \sin \omega t - t \cos \omega t \right) \sin N \frac{\pi}{a} x$$

**Esercizio 6.10.11.** Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \quad \text{in } D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, t > 0\}$$

ove  $A \in \mathbb{R}$ , con condizioni di Dirichelet–Neumann  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  per ogni  $t > 0$ ,  $u(x, 0) = 0$  e  $\partial u/\partial t(x, 0) = 0$ .

Soluzione 6.10.11: in questo caso non si verifica il fenomeno della risonanza, la soluzione è data da

$$u(x, t) = \frac{4A}{\pi} \left[ \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ dispari}}} \frac{1}{n^3} \cos nct \sin nx - \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ dispari}}} \sin nx \right] = \frac{4A}{\pi} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ dispari}}} \frac{1}{n^3} \cos nct \sin nx - \frac{1}{2} Ax(\pi - x)$$

**Esercizio 6.10.12.** Propagazione ondosa forzata. Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Ax \sin \omega t \quad \text{in } D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, t > 0\}$$

ove  $A, \omega \in \mathbb{R}$ , con condizioni di Dirichlet–Neumann  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  per ogni  $t > 0$ ,  $u(x, 0) = 0$  e  $\partial u / \partial t(x, 0) = 0$ .

Soluzione 6.10.12:  $\omega_n = nc$ , se per ogni  $n = 1, 2, \dots$  si ha  $\omega_n \neq \omega$  (assenza di risonanza) allora la soluzione è data da

$$u(x, t) = 2Ac^2 \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n\pi}{n(\omega_n^2 - \omega^2)} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \sin nx$$

**Esercizio 6.10.13.** Per effetto di una sollecitazione esterna periodica agente sull'elemento di ascissa  $x_0 \in (0, \pi)$  di una corda di lunghezza  $\pi$ , l'equazione che descrive le vibrazioni della corda si scrive

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \alpha \delta(x - x_0) \sin(4ct)$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . Si supponga che gli estremi della corda siano fissi,  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$ , e che la corda sia inizialmente a riposo, ovvero  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ . Si risponda alle seguenti domande:

1. si determini la funzione  $u(x, t)$  che descrive le vibrazioni della corda;
2. si dica se esistono valori di  $x_0 \in (0, \pi)$  per i quali non si osserva il fenomeno della risonanza.

**Esercizio 6.10.14.** Un estremo di una sbarra di lunghezza  $\ell$ , densità  $\rho$  e modulo di Young  $E$  è libero e l'altro è fissato rigidamente. Si determinino le vibrazioni longitudinali per condizioni iniziali di Cauchy arbitrarie.

**Esercizio 6.10.15.** Un estremo di una sbarra di lunghezza  $\ell$ , densità  $\rho$  e modulo di Young  $E$  è libero e l'altro è fissato elasticamente. Si determinino le vibrazioni longitudinali per condizioni iniziali di Cauchy arbitrarie.

Soluzione 6.10.15:  $u(x, t) = \sum_{n \geq 1} [a_n \cos(\lambda_n ct) + b_n \sin(\lambda_n ct)] \cos(\lambda_n x)$  con  $\lambda_n$  le radici positive dell'equazione  $\lambda \tan(\lambda \ell) = h$ . Si osserva che  $\lambda_n$  e  $\cos(\lambda_n x)$  sono gli autovalori e le autofunzioni del seguente problema di Sturm–Liouville

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 & 0 \leq x \leq \ell \\ X'(0) = 0, X'(\ell) + hX(\ell) = 0 \end{cases}$$

### 6.11. Equazione delle onde: membrana rettangolare

Le vibrazioni di una membrana rettangolare di lati  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$  sono descritte dall'equazione di d'Alambert in due dimensioni spaziali, ovvero nella regione  $D := D_{\text{sp}} \times \mathbb{R}_+$  ove  $D_{\text{sp}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ . Condizioni al bordo sensate sono le seguenti:

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = v_0(x, y) & \forall (x, y) \in D_{\text{sp}} \\ u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0 & \forall y \in [0, b], \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0 & \forall x \in [0, a], \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (6.10)$$

**Esercizio 6.11.2.** Si studino le vibrazioni della membrana rettangolare con le condizioni al bordo (6.10).

Soluzione 6.11.2:  $u(x, y, t) = \sum_{n, m \geq 1} [a_{nm} \sin(\omega_{n, m} t) + b_{nm} \cos(\omega_{n, m} t)] \sin(n\pi x/a) \sin(m\pi y/b)$  ove

$$\omega_{nm} = - \left[ \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right] \quad \text{e} \quad b_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi dx \int_0^\pi dy \sin(nx) \sin(my) u_0(x, y)$$

e  $a_{nm}$  è espresso in modo simile.

**Esercizio 6.11.3.** Si risolva l'Esercizio 6.11.2 nel caso  $u_0(x, y) = 0$  e  $v_0(x, y) = (I/\rho)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$  con  $x_0 \in (0, a)$  e  $y_0 \in (0, b)$ .

Soluzione 6.11.3: stessa soluzione dell'Esercizio 6.11.2 con i coefficienti dati dalle espressioni seguenti  $b_{nm} = 0$  per ogni  $n, m \geq 1$  e  $a_{nm} = [4I/(\rho c \pi^2 \omega_{nm})] \sin(nx_0) \sin(my_0)$ .

### 6.12. Equazione del calore: sbarra limitata

L'equazione del calore descrive i processi diffusivi: detta *costante di diffusione* il numero reale  $D$  si ha che l'osservabile fisica  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è descritta dall'equazione

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \quad (6.11)$$

Alcuni esempi fisici:  $u$  è la temperatura in una sbarra unidimensionale e  $D = \sqrt{k/c\rho}$  ove  $k$  è la conduttività termica della sbarra,  $\rho$  è la sua densità e  $c$  il suo calore specifico;  $u$  può rappresentare la densità di un fluido in una miscela e  $D$  è il coefficiente di diffusione.

Nel caso dell'interpretazione termica di (6.11) si può aggiungere un termine  $f(x, t)$  che rappresenta la quantità di calore (energia termica), opportunamente normalizzata, introdotta nella sbarra per unità di tempo e di lunghezza. In questo caso si ha l'*equazione della conduzione termica*

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{1}{c\rho} f(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \quad (6.12)$$

Le condizioni al bordo dipendono dal problema fisico in studio; consideriamo il caso della sbarra limitata di lunghezza  $\ell$ . Le equazioni (6.11) e (6.12) vanno risolte in  $D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \ell, t \geq 0\}$  con condizione di Cauchy  $u(x, 0) = u_0(x)$  e con ulteriori condizioni al bordo che dipendono dal particolare problema fisico:

1. estremo 0 della sbarra a temperatura fissata  $v_0(t)$ :  $u(0, t) = v_0(t)$  per ogni  $t \geq 0$ ;
2. estremo  $\ell$  della sbarra a temperatura fissata  $v_0(t)$ :  $u(\ell, t) = v_0(t)$  per ogni  $t \geq 0$ ;
3. estremo 0 della sbarra a contatto con una sorgente che fornisce alla sbarra energia termica per unità di tempo  $Q(t)$ . Allora  $u_x(0, t) = -Q(t)/k$ .
4. estremo  $\ell$  della sbarra a contatto con una sorgente che fornisce alla sbarra energia termica per unità di tempo  $Q(t)$ . Allora  $u_x(\ell, t) = Q(t)/k$ .
5. estremo  $\ell$  libero e irradiante in una regione a temperatura  $\vartheta(t)$ . Allora, detto  $\lambda > 0$  il *coefficiente di scambio termico*, si ha la condizione al bordo  $u_x(\ell, t) = -\lambda[u(\ell, t) - \vartheta(t)]$ . Tale condizione è detta anche legge di Newton e il coefficiente  $\lambda$  è legato alla costante di Stefan.

**Esercizio 6.12.2.** Si risolva l'equazione (6.11) nella regione  $D := [0, \ell] \times [0, +\infty)$  con condizioni al contorno  $u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$  (gli estremi della sbarra sono isolati termicamente) e condizione iniziale  $u(x, 0) = u_0(x)$  per ogni  $x \in [0, \ell]$ , con  $u_0 \in C^\infty([0, \ell])$ . Si discuta il comportamento della soluzione per  $t \rightarrow +\infty$ .  
Soluzione 6.12.2: si trova

$$u(x, t) = (1/\ell) \int_0^\ell dx u_0(x) + (2/\ell) \sum_{n \geq 1} \left( \int_0^\ell dx u_0(x) \cos(n\pi x/\ell) \right) \exp\{-kn^2\pi^2 t/a^2\} \cos(n\pi x/\ell)$$

**Esercizio 6.12.3.** Si risolva l'esercizio precedente con  $u_0(x) = x$  e  $\ell = 1$ .

**Esercizio 6.12.4.** Si risolva l'esercizio precedente con  $u_0(x) = x^2$  e  $\ell = \pi$ .

**Esercizio 6.12.5.** Si risolva l'equazione del calore con calore generato all'interno della sbarra, ovvero si risolva l'equazione (6.12) con  $f(x, t) = ac\rho x$  e  $a \in \mathbb{R}$ , nella regione  $D := [0, \pi] \times [0, +\infty)$ . Si impongano le condizioni

al contorno  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$  (gli estremi della sbarra sono a temperatura nulla) e condizione iniziale  $u(x, 0) = 0$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ . Si discuta il comportamento della soluzione per  $t \rightarrow +\infty$ .

Soluzione 6.12.5:  $u(x, t) = (2a/k) \sum_{n \geq 1} (-1)^n / n^3 (1 - \exp\{-kn^2 t\}) \sin nx$ , nel limite  $t \rightarrow +\infty$  la soluzione tende a  $u(x) = (a/6k)x(\pi^2 - x^2)$ .

**Esercizio 6.12.6.** Propagazione del calore su un'anello. Si risolva l'equazione (6.11) nella regione  $D := [-\pi, \pi] \times [0, +\infty)$  con condizioni al contorno  $u(-\pi, y) = u(\pi, y) = 0$  e  $u_x(-\pi, y) = u_x(\pi, y) = 0$  per ogni  $t \geq 0$  condizione iniziale  $u(x, 0) = A_0 + A_1 \cos(mx)$  con  $A_0, A_1 \in \mathbb{R}$  e  $m$  un intero positivo fissato. Si discuta il comportamento della soluzione per  $t \rightarrow +\infty$ .

Soluzione 6.12.2:  $u(x, t) = A_0 + A_1 \exp\{-km^2 t\} \cos(mx)$ .

**Esercizio 6.12.7.** Si risolva l'equazione del calore (6.11) per la sbarra limitata di lunghezza  $\pi$  con le seguenti condizioni al bordo:

1.  $u(x, 0) = a$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ ,  $u(0, t) = 0$  e  $u(\pi, t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$ ;
2.  $u(x, 0) = \sin^3 x$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ ,  $u(0, t) = 0$  e  $u(\pi, t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$  (suggerimento:  $\sin^3 x = [3 \sin x - \sin(3x)]/4$ );
3.  $u(x, 0) = \cos^2 x$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ ,  $u_x(0, t) = 0$  e  $u_x(\pi, t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$ ;
4.  $u(x, 0) = x(\pi - x)$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ ,  $u(0, t) = 0$  e  $u(\pi, t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$ ;
5.  $u(x, 0) = x^2 - \pi^2$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ ,  $u_x(0, t) = 0$  e  $u(\pi, t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$ ;
6.  $u(x, 0) = x$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ ,  $u_x(0, t) = 0$  e  $u_x(\pi, t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$ ;
7.  $u(x, 0) = \sin x$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ ,  $u(0, t) = 0$  e  $u(\pi, t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$ ;
8.  $u(x, 0) = T_1$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ ,  $u(0, t) = T_0$  e  $u(\pi, t) = T_0$  per ogni  $t \geq 0$ ;
9.  $u(x, 0) = T_1 x/\pi$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ ,  $u(0, t) = T_0$  e  $u_x(\pi, t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$ ;
10.  $u(x, 0) = T_0$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ ,  $u_x(0, t) = \Delta T/\pi$  e  $u_x(\pi, t) = \Delta T/\pi$  per ogni  $t \geq 0$ ;
11.  $u(x, 0) = T_1$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ ,  $u(0, t) = T_0$  e  $u_x(\pi, t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$ .

Si discuta il significato fisico della soluzione, in particolari si studi il limite  $t \rightarrow \infty$ .

Soluzione 6.12.7: si riporta la soluzione dei due primi problemi.

1.  $u(x, t) = [4a/\pi] \sum_{n \geq 1} [1/(2n - 1)] \sin[(2n - 1)x] \exp\{-D(2n - 1)^2 t\}$
2.  $u(x, t) = (3/4) \sin x \exp\{-Dt\} - (1/4) \sin(3x) \exp\{-9Dt\}$

**Esercizio 6.12.8.** Si consideri una parete di spessore  $d$  e conducibilità termica  $k$  che separa un ambiente interno da uno esterno a temperatura  $T_0$ . Si supponga che all'istante  $t = 0$  la temperatura nella parete sia uniformemente uguale a  $T_0$  e che alla parete interna venga trasmessa una quantità di calore  $H$  per unità di tempo. Si determini la temperatura all'interno della parete e si mostri che per tempi piccoli la temperatura sulla parete interna cresce come  $\sqrt{t}$ .

Soluzione 6.12.8: il problema ai limiti è  $u(x, 0) = T_0$ ,  $u(d, t) = T_0$  e  $u_x(0, t) = -H/k$ . La temperatura  $u(x, t)$  è data da

$$u(x, t) = T_0 + \frac{Hd}{k} \left[ 1 - \frac{x}{d} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n + 1)^2} \cos \left[ \frac{(2n + 1)\pi x}{2d} \right] e^{-(2n+1)^2 \pi^2 Dt / (4d^2)} \right]$$

**Esercizio 6.12.9.** Si consideri una sbarra rettilinea di lunghezza  $\pi$ , densità  $\rho$ , conducibilità termica  $k$  e calore specifico  $c$ . Si supponga che una sorgente di calore puntiforme posta a contatto con la sbarra nel punto di ascissa  $\pi/2$  ceda alla sbarra una quantità di calore per unità di tempo pari a  $Q > 0$ . Si risponda alle seguenti domande:

1. si determini la distribuzione di temperatura  $u(x, t)$  all'interno della sbarra supponendo che all'istante iniziale la temperatura nella sbarra sia nulla e che gli estremi della sbarra siano mantenuti a temperatura nulla;

2. si discuta il limite di tempi grandi. In particolare si determini in quale punto si raggiunge la temperatura massima e si calcoli tale temperatura.
3. Facoltativo: si determini la distribuzione di temperatura  $u(x, t)$  all'interno della sbarra supponendo che  $u(x, 0) = 0$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ , che l'estremo  $x = 0$  sia isolato termicamente e quello  $x = \pi$  sia mantenuto a temperatura nulla.

### 6.13. Equazione del calore: sbarra illimitata

Un caso interessante è anche quello in cui l'equazione (6.11) viene studiata su tutta la retta reale, ovvero in  $D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ . In questo caso essa descrive il rilassamento della temperatura in una sbarra infinita; l'unica condizione al bordo sarà di tipo Cauchy, ovvero di tipo iniziale. Si ha, quindi, il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{1}{c\rho} f(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) & \forall (x, t) \in D \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (6.13)$$

La condizione di Cauchy in taluni casi va intesa in modo più debole, si richiede che  $u(x, t)$  tenda alla condizione iniziale per  $t \rightarrow 0$ ; ovvero  $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 6.13.2.** Si risolva l'equazione del calore (6.11) per una sbarra illimitata con condizione iniziale  $u(x, 0) = u_0(x)$  nei seguenti casi:

1.  $u_0(x) = \delta(x)$ ;
2.  $u_0(x) = T_0$  per  $x > 0$  e  $u_0(x) = -T_0$  per  $x < 0$ ;
3.  $u_0(x) = 1$  per  $|x| < \ell$  e  $u_0(x) = 0$  per  $|x| \geq \ell$ , con  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ ;
4.  $u_0(x) = \exp\{-\alpha|x|\}$  con  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ;
5.  $u_0(x) = 0$  per  $x < 0$ ,  $u_0(x) = T_0$  per  $0 < x < \ell$  e  $u_0(x) = 0$  per  $x > \ell$ , con  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ .

Soluzione 6.13.2: 1.  $u(x, t) = [1/(2D\sqrt{\pi t})] \exp\{-x^2/(4Dt)\}$ ; 2. la soluzione può essere ricondotta alla funzione errore

$$u(x, t) = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4Dt}} e^{-y^2} dy$$

**Esercizio 6.13.3.** Si risolva l'equazione del calore (6.11) per una sbarra semi-illimitata, ovvero nella regione  $D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, t \geq 0\}$  con le seguenti condizioni al bordo:

1.  $u(x, 0) = T_0$  per  $0 < x < \ell$ ,  $u(x, 0) = 0$  per  $x > \ell$ , con  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ , e  $u(0, t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$ ;
2.  $u(x, 0) = T_0$  per  $0 < x < \ell$ ,  $u(x, 0) = 0$  per  $x > \ell$ , con  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ , e  $u_x(0, t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$ ;
3.  $u(x, 0) = T_0(1 - \exp\{-\alpha x\})$  per  $x \geq 0$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , e  $u(0, t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$ .

## A. Notazioni

Segue l'elenco delle notazioni standard usate negli appunti:

- $\mathbb{R}$  insieme dei numeri reali.
- $\mathbb{R}_+$  insieme dei numeri reali positivi.
- $\mathbb{R}^*$  insieme dei numeri reali privato dello zero.
- $\mathbb{R}_+^*$  insieme dei numeri reali positivi privato dello zero.

- Presi  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $a < b$  l'intervallo chiuso di estremi  $a, b$  viene denotato con  $[a, b]$  e quello aperto con  $(a, b)$  oppure  $]a, b[$ ; si possono considerare intervalli semiaperti per i quali si usano i simboli  $[a, b)$ , ovvero  $[a, b[$ , e  $(a, b]$ , ovvero  $]a, b]$ .
- $\mathbb{Z}$  insieme dei numeri interi.
- $\mathbb{Z}_+$  insieme dei numeri interi positivi.
- $\mathbb{Z}^*$  insieme dei numeri interi privato dello zero.
- $\mathbb{Z}_+^*$  insieme dei numeri interi positivi privato dello zero.
- $\mathbb{N}$  insieme dei numeri naturali.
- $\mathbb{N}^*$  insieme dei numeri naturali privato dello zero.

## B. Alcuni integrali notevoli

Si calcola l'integrale della gaussiana esteso a tutto l'asse reale; più precisamente si dimostra il seguente risultato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Infatti in virtù del Teorema di Fubini si ha

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy e^{-(x^2+y^2)}$$

Passando alle coordinate polari  $\rho \in [0, \infty)$  e  $\varphi \in [0, 2\pi]$  tali che  $x = \rho \cos \varphi$  e  $y = \rho \sin \varphi$  si ha

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \rho e^{-\rho^2} = 2\pi \left( -\frac{1}{2} \right) e^{-\rho^2} \Big|_0^\infty = \pi$$

da cui segue banalmente la tesi.

## Bibliografia

- [1] G.B. Arfken, H.J. Weber, “Mathematical Methods for Physicist.” Academic Press, 1995, San Diego, California.
- [2] Vladimir I. Arnol'd, “Ordinary Differential Equations.” Springer-Verlag, 1992.
- [3] W. Bolton, “Fourier series.” Longman Scientific & Technical, 1995, Harlow, England.
- [4] J.W. Dettman, “Applied Complex Variables.” Dover Publication, Inc., 1965, New York.
- [5] D.G. Duffy, “Solutions of partial differential equations.” Tab books Inc., US, 1986.
- [6] Lawrence C. Evans, “Partial Differential Equations.” Graduate Studies in Mathematics vol. 19, American Mathematical Society, 2002.
- [7] M. Evgrafov, K. Béjanov, Y.V. Sidorov, M.V. Fedoryuk, M.I. Shabunin, “Recueil de problèmes sur la théorie des fonctions analytiques.” Éditions Mir, 1974, Moscou.

- [8] G. Gentile, “Introduzione ai sistemi dinamici.”
- [9] A. Ghizzetti, F. Rosati, “Analisi Matematica.” Volume 1. Editoriale Veschi, 1992, Milano.
- [10] Fritz John, “Partial Differential Equations.” Applied Mathematical Sciences vol. 1, Springer–Verlag, 1971.
- [11] L. Råde, B. Westergren, “Mathematics Handbook for Science and Engineering.” Studentlitteratur, 1998, Lund, Sweden.
- [12] Y.V. Sidorov, M.V. Fedoryuk, M.I. Shabunin, “Lectures on the Theory of Functions of a Complex variable.” Mir Publishers, 1985, Moscow.
- [13] A. Pinkus, S. Zafrany, “Fourier Series and Integral Transforms.” Cambridge University Press, 1997, Cambridge, England.
- [14] Isaak Rubinstein, Lev Rubinstein, “Partial differential equations in classical mathematical physics.” Cambridge University Press, 1993.
- [15] A.N. Tichonov, A.A. Samarskij, B.M. Budak, “Problemi della fisica matematica.” Edizioni Mir, Mosca, 1982.
- [16] J. Ward Brown, R.V. Churchill, “Fourier Series and Boundary Value Problems.” Mc Graw–Hill, Inc., 1993.

# Indice

<b>1. Trasformata di Fourier</b>	<b>1</b>
1.2. <i>Trasformata di Fourier</i> . . . . .	1
1.3. <i>Trasformata di Fourier della gaussiana</i> . . . . .	6
1.4. <i>Trasformata di Fourier di una funzione razionale</i> . . . . .	8
1.5. <i>Funzione caratteristica di una distribuzione di probabilità</i> . . . . .	10
1.6. <i>Reticoli di diffrazione</i> . . . . .	11
<b>2. Serie e integrale di Fourier</b>	<b>11</b>
2.2. <i>Serie di Fourier</i> . . . . .	11
2.3. <i>Serie di Fourier di soli seni e di soli coseni</i> . . . . .	16
2.4. <i>Integrale di Fourier e sue applicazioni</i> . . . . .	16
<b>3. Richiami sulle equazioni differenziali ordinarie</b>	<b>16</b>
3.2. <i>Equazioni lineari a coefficienti costanti.</i> . . . . .	17
3.3. <i>Sistemi di equazioni differenziali lineari.</i> . . . . .	20
3.4. <i>Equazioni differenziali a variabili separabili.</i> . . . . .	38
3.5. <i>Sistemi dinamici unidimensionali.</i> . . . . .	38
3.6. <i>Sistemi dinamici planari e moti unidimensionali.</i> . . . . .	40
3.7. <i>Moti centrali.</i> . . . . .	59
3.8. <i>Serie di Fourier e equazioni differenziali ordinarie</i> . . . . .	63
<b>4. Operatori differenziali nello spazio tridimensionale</b>	<b>70</b>
<b>5. Equazioni alle derivate parziali del primo ordine</b>	<b>73</b>
5.2. <i>PDE lineari e semilineari</i> . . . . .	73
5.3. <i>PDE quasilineari</i> . . . . .	74
<b>6. Equazioni alle derivate parziali del secondo ordine</b>	<b>76</b>
6.2. <i>Classificazione e forma canonica</i> . . . . .	76
6.3. <i>Alcuni semplici esempi preliminari</i> . . . . .	77
6.4. <i>Equazione di Laplace: funzioni armoniche</i> . . . . .	77
6.5. <i>Equazione di Laplace: dominio rettangolare</i> . . . . .	78
6.6. <i>Equazione di Laplace: dominio a simmetria cilindrica</i> . . . . .	80
6.7. <i>Equazione di Helmholtz</i> . . . . .	81
6.8. <i>Equazione delle onde: corda illimitata</i> . . . . .	81
6.9. <i>Equazione delle onde: corda semi-illimitata</i> . . . . .	83
6.10. <i>Equazione delle onde: corda e sbarra limitata</i> . . . . .	84
6.11. <i>Equazione delle onde: membrana rettangolare</i> . . . . .	87
6.12. <i>Equazione del calore: sbarra limitata</i> . . . . .	87
6.13. <i>Equazione del calore: sbarra illimitata</i> . . . . .	90
<b>A. Notazioni</b>	<b>90</b>
<b>B. Alcuni integrali notevoli</b>	<b>91</b>

