Fisica Matematica – 1º anno specialistica in Ingegneria Meccanica
E.N.M. Cirillo – Anno Accademico 2007–2008

L'esame consiste in una prova scritta e una orale; per la prima sessione del 2007 sono previsti due appelli: 23 gennaio 2008 e 22 febbraio 2008.

Durante lo svolgimento del corso sono previste due prove d'esonero per lo scritto. La prima prova sui sistemi dinamici, primi due paragrafi del programma, la seconda sulle equazioni alle derivate parziali delle fisica matematica. Gli studenti esonerati dallo scritto potranno sostenere l'orale in uno degli appelli previsti nella prima sessione.

<u>Sistemi di equazioni differenziali ordinarie autonome del primo ordine</u> [2, 3]

- Sistemi dinamici unidimensionali: spazio delle fasi esteso, problema del viaggiatore, linea di fase, campo delle direzioni, punti fissi, ritratto di fase, stabilità dei punti fissi secondo Liapunov. Modello di Malthus, bilancio termico del pianeta Terra, legge di raffreddamento di Newton, equazione logistica. Calcolo e stima dei tempi di percorrenza.
- Sistemi meccanici conservativi unidimensionali. Teorema di conservazione dell'energia totale, riduzione alle quadrature del problema del moto, spazio delle fasi, orbite, punti di equilibrio. Esempi: caduta di un grave e oscillatore armonico, costruzione del ritratto di fase a partire dalla soluzione delle euqazioni del moto. Analisi qualitativa: costruzione del ritratto di fase, finitezza del tempo di percorrenza lungo le orbite periodiche, asintoticità del moto lungo la separatrice, andamento delle orbite nei punti a velocità nulla. Stabilità dei punti fissi, teorema di Dirichelet per la stabilità e teorema sull'instabilità delle posizioni di equilibrio. Oscillatore armonico: ritratto di fase e calcolo del periodo delle oscillazioni, indipendenza del periodo dall'ampiezza dell'energia del moto. Pendolo semplice: ritratto di fase e calcolo del periodo delle oscillazioni, dipendenza del periodo dall'ampiezza dell'energia del moto, correzione perturbative al periodo delle piccole oscillazioni. Teorema sulle piccole oscillazioni.
- Sistemi dinamici in dimensione n. Problema di Cauchy. Connessione con le equazioni differenziali ordinarie di ordine superiore al primo. Richiami di concetti metrici e topologici in $\mathbb{R}^n$: norma e distanza euclidea, intorno sferico, insieme aperto, chiusura. Teorema di Cauchy (senza dimostrazione), Teorema sul prolungamento (senza dimostrazione).
- Interpretazione geometrica. Moto o legge oraria, piano delle fasi e piano delle fasi esteso; linee di fase (curve integrali, traiettorie o orbite): struttura delle orbite, assenza di intersezioni e autointersezioni; campo vettoriale delle direzioni, punti fissi (critici o d'equilibrio), stabilità secondo Liapunov e stabilità asintotica, bacino d'attrazione di un punto asintoticamente stabile. Esempi: prodotto diretto, oscillatore armonico, modello di Lotka–Volterra. Il metodo delle nullcline. Esempi.
- Derivata direzionale, derivata di Lie definita da un campo vettoriale. Integrali primi e equazioni differenziali alle derivate parziali. Determinazione di un integrale primo.

Il metodo del fattore integrante. Integrale primo e ritratto di fase: applicazione al problema di Lotka–Volterra. Riduzione del calcolo dei tempi di percorrenza al calcolo di un integrale definito. Teorema sul legame tra l'esistenza degli integrali primi e l'assenza di punti di equilibrio asintoticamente stabili. Esempi.

Stabilità secondo Liapunov e applicazioni [2, 3]

- Stabilità dei punti fissi. Teorema di stabilità lineare per i sistemi dinamici non lineari (senza dimostrazione), confronto con l'analogo teorema per i sistemi lineari. Confronto tra il comportamento di un sistema dinamico non lineare e il corrispondente sistema lineare ottenuto linearizzando in un punto fisso. Applicazioni.
- Moti alla Poinsot. Studio della stabilità delle rotazioni permanenti sulla base della teoria della stabilità dei sistemi dinamici. Il caso con momenti d'inerzia centrali a due a due distinti, il caso del giroscopio e il caso del corpo a simmetria sferica.
- Funzioni di Liapunov e teoremi di Liapunov sulla stabilità dei punti fissi. Esempi e applicazioni: stabilità dei punti fissi dell'oscillatore smorzato, del pendolo semplice e del pendolo dissipativo.

Introduzione alle equazioni differenziali alle derivate parziali [3]

- Richiami sugli operatori differenziali; loro primcipali proprietà. Teorema della divergenza e Teorema di Stokes. Operatori differenziali in coordinate cilindriche e polari.
- Concetto di campo ed equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) Equazione di continuità per un fluido incompressibile come conseguenza dal principio di conservazione della massa. Problemi al contorno di interesse fisico.
- Equazione delle onde per il campo elettromagnetico nel vuoto, onde elettromagnetiche piane ed equazione di d'Alembert. Equazione di d'Alembert per le piccole oscillazioni della corda sottile: deduzione alla Lagrange e limite del continuo [4, Capitolo 11]. Problemi al contorno di interesse fisico.
- Equazione di Laplace per la distribuzione stazionaria di temperatura, equazione di Poisson ed equazione di Laplace per il potenziale elettrostatico. Problemi al contorno di interesse fisico.
- Equazione del calore come conseguenza del principio di conservazione dell'energia e della legge di Fourier. Problemi al contorno di interesse fisico.

Equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine [1, 3]

- PDE del primo ordine: equazioni lineari, semilineari e quasilineari. Principio di sovrapposizione per il caso lineare. Soluzione con il metodo di separazione delle variabili e mediante l'analogia con il problema della determinazione di un integrale primo per un sistema dinamico planare.
- PDE del primo ordine lineari omogenee. Curve caratteristiche e integrale generale. Il problema di Cauchy; metodi di soluzione. Applicazioni: equazione del trasporto, equazione di continuità con campo delle velocità dipendente dal tempo. equazione delle onde, formula di d'Alembert, moto di profili. [5, Capitolo 2, Paragrafo 2]

- PDE del primo ordine lineari non omogenee e semilineari. Curve caratteristiche e integrale generale. Il problema di Cauchy; metodi di soluzione. Applicazioni: equazione di continuità con campo delle velocità dipendente dalla variabile spaziale.

Richiami sulla serie di Fourier

Coefficienti e serie di Fourier. Serie di soli seni e di coli coseni. Problemi di Sturm–Liouville sull'intervallo $[0, \pi]$ con condizioni al bordo di Dirichelet, Neumann e miste. Autovalori e autofunzioni. Legame con i sistemi ortonormali completi di $\mathcal{L}^2([0, \pi])$.

Equazione delle onde $[1, 3, 5]$

- Equazione di d'Alembert in una dimensione. Riduzione del problema alla soluzione di due equazioni del primo ordine lineari e omogenee. Integrale generale. Problema di Cauchy e Teorema di esistenza e unicità. Formula di d'Alembert. Propagazione di profili lungo corde tese illimitate e semi–illimitate, riflessione di un profilo [5, Capitolo 2, Paragrafo 2].
- La corda finita. Stime di energia. Unicità della soluzione del problema di Cauchy con condizione di Dirichelet agli estremi. Esistenza della soluzione nel caso omogeneo e in quello completo con il metodo della separazione delle variabili. Densità di modi normali di vibrazione per la corda tesa: dipendenza dal dato al bordo. Corda forzata e condizione di risonanza. Generalizzazioni: l'equazione del telegrafista.

Equazione di Laplace $[1, 3, 5]$

- Principio del massimo. Teorema di unicità per il Problema di Dirichelet.
- Esistenza della soluzione del problema di Dirichelet nel rettangolo: metodo di separazione delle variabili.

Equazione del calore $[1, 3, 5]$

- Possibili problemi ai limiti. Metodo della separazione delle variabili per la sbarra limitata. Soluzione dell'equazione del calore in presenza di sorgenti. Principio del massimo e teorema di unicità della soluzione per il problema di Dirichelet.
- Problema di Cauchy per la sbarra illimitata, rappresentazione integrale della soluzione, velocità infinita per la propagazione del calore [6, Chapter IX, pag. 345].

Bibliografia

[1] Daniele Andreucci, "Appunti per il corso di equazioni alle derivate parziali."

[2] Vladimir I. Arnol'd, "Ordinary Differential Equations." Springer–Verlag, 1992.

[3] Emilio N.M. Cirillo, G. Gonnella, "Appunti delle lezioni."

[4] Herbert Goldstein, "Meccanica classica." Zanichelli, Bologna, 1982.

[5] Andrej N. Tychonov, Aleksandr A. Samarski, "Equazioni della fisica matematica." Mir, Mosca, 1981.

[6] E.C. Zachmanoglou, Dale W. Thoe, "Introduction to Partial Differential Equations with Applications." Dover Publications, Inc., New York, 1986.