

**Laurea in Ingegneria Civile e Industriale – Latina – 2° anno**

**Insegnamento: Meccanica Razionale – 6 CFU**

Docente: E.N.M. Cirillo – Anno Accademico: 2014–2015

A partire dal 2013–14 il Corso di Meccanica Razionale è stato portato a 6 crediti. Gli studenti degli anni precedenti possono sostenere l'esame sul programma del loro anno di corso oppure sull'unione dei programmi di Meccanica Razionale e di Laboratorio di Meccanica Razionale. La prova scritta del corso di Meccanica Razionale è comune a tutti gli studenti.

**Programma di massima**

- A. Prerequisiti di algebra lineare [1, 5, 6].
- B. Richiami di geometria [1, 5, 6].
- C. Cinematica dell'elemento [1].
- D. Cinematica degli osservatori e moti relativi [1, 2].
- E. Leggi della meccanica [2, 10].
- F. Dinamica e statica dell'elemento [1, 11].
- G. Dinamica dei sistemi [1, 2].
- H. Dinamica dei sistemi olonomi: equazioni di Lagrange [1, 2].
- I. Statica dei sistemi olonomi: equilibrio e stabilità [1, 2].
- J. Sistemi meccanici conservativi unidimensionali [1, 7].
- K. Cinematica del corpo rigido: il moto e l'atto di moto [1, 2].
- L. Corpo rigido: geometria delle masse [1, 2].
- M. Dinamica e statica del corpo rigido: formalismo lagrangiano [1, 2].

**Modalità di svolgimento dell'esame**

L'esame consiste in una prova scritta e un colloquio orale. Il colloquio orale si svolge immediatamente dopo la correzione della prova scritta sulla base del calendario predisposto dal docente.

La prova scritta consta di due parti: alcuni (quattro o cinque) quesiti ed esercizi brevi del tipo di quelli proposti nelle esercitazioni

<http://www.sbai.uniroma1.it/~emilio.cirillo/enmc-didattica.php>

e un problema di Meccanica Razionale sul formalismo lagrangiano per i sistemi olonomi a vincoli perfetti (si veda la relativa esercitazione per una rassegna di alcuni problemi tipici). La prima parte dura due ore e mezza, mentre la seconda soltanto due. Tra le due prove è previsto un intervallo di circa quindici minuti.

Durante la prova scritta non è possibile usare né appunti (scritti a mano, fotocopiati, stampati, etc.) di nessuna natura né dispositivi elettronici. Gli studenti possono consultare esclusivamente e brevemente le copie del libro di testo (o di eventuali altri testi usati per la preparazione dell'esame) preventivamente poste sulla cattedra.

### **Testi consigliati**

- [1] Emilio N.M. Cirillo, “Appunti delle Lezioni di Meccanica Razionale per l’Ingegneria.” Edizioni CompoMat, 2012, Configni (Ri).
- [2] P. Benvenuti, P.G. Bordoni, G. Maschio, “Lezioni di Meccanica Razionale.” Edizioni CompoMat, 2010, Configni (Ri).

### **Testi suggeriti per eventuali approfondimenti**

- [3] V.I. Arnold, “Metodi Matematici della Meccanica Classica.” Editori Riuniti, 1986.
- [4] P. Benvenuti, G. Maschio, “Esercizi di Meccanica Razionale.” Edizioni CompoMat, 2011, Configni (Ri).
- [5] A. Bichara, F. Dell’Isola, “Elementi di Algebra Tensoriale con Applicazioni alla Meccanica dei Solidi.” Società Editrice Esculapio, 2005, Bologna.
- [6] W.E. Deskins, “Abstract Algebra.” The MacMillian Company, 1964, New York.
- [7] G. Gallavotti, “Meccanica elementare.” Boringhieri, Torino, 1986.
- [8] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, “Meccanica Classica.” Zanichelli, 2005, Bologna.
- [9] L. Landau, E. Lifchitz, “Meccanica,” tomo 1 della collezione “Fisica Teorica.” Mir, 1964, Mosca.
- [10] T. Levi-Civita, U. Amaldi, “Lezioni di Meccanica Razionale.” Edizioni CompoMat, 2012, Configni (Ri).
- [11] M. Lo Schiavo, “Appunti di Meccanica Razionale.” Edizioni CompoMat, 2010, Configni (Ri).
- [12] E. Olivieri, “Appunti di Meccanica Razionale.” UniTor, 1991, Roma.
- [13] J.R. Taylor, “Meccanica Classica.” Zanichelli, 2006, Bologna.

## Diario delle lezioni

Lezioni 1 – 4 (30 settembre 2014)

**A.** Prerequisiti di algebra. Spazi vettoriali. Sottospazio lineare, sistema di generatori, sistema linearmente indipendente e base. Componenti controvarianti. Matrice del cambiamento di base. Regola di trasformazione per le componenti controvarianti. Spazi vettoriali pseudo-euclidei. Definizione, prodotto scalare, vettori ortogonali. Componenti covarianti e regola di trasformazione sotto cambiamento di base. Basi ortogonali e ortonormali. Cambiamento di basi tra basi ortonormali, matrici del gruppo  $O(n)$  e del sottogruppo  $SO(n)$ . Orientazione positiva o levogira. Spazi vettoriali euclidei. Norma o modulo di un vettore, vettori paralleli, proiezione ortogonale di un vettore. Spazio vettoriale euclideo tridimensionale, prodotto vettoriale e vettori assiali.

**B.** Richiami sugli spazi affini. Sottospazi, riferimenti cartesiani, coordinate cartesiane, assi coordinati, piani coordinati. Spazi affini euclidei, distanza euclidea, semiretta, angolo convesso, funzione coseno e funzione seno, identità dell'uno trigonometrico, ampiezza dell'angolo, modulo del prodotto vettoriale, angoli orientati, coseni direttori.

**B.** Curve nello spazio affine: curve regolari, vettore tangente, ascissa curviline, versore tangente. Curve rettilinee, curvatura, raggio di curvatura, versore normale principale.

Lezioni 5 – 8 (3 ottobre 2014)

**B.** Curva piana, curva sghemba, piano osculatore e sua interpretazione geometrica. Versore binormale, triedro principale, torsione e sua interpretazione geometrica, formule di Frenet.

**B.** Omomorfismo e isomorfismo tra gruppi. Omomorfismo e isomorfismo tra spazi vettoriali. Isometrie tra spazi vettoriali e conservazione del prodotto scalare. Isometrie affini e conservazione delle distanze, delle coordinate, degli angoli, del prodotto vettoriale.

**C.** Osservatore, posizione, moto, moti componenti, traiettoria, orbita, velocità, accelerazione, legge oraria, rappresentazione intrinseca. Spaziotempo newtoniano. Classificazione: moto rettilineo, moto piano, moto circolare, moto uniforme, moto uniformemente accelerato, moto vario. Esempi: moto del grave e moto armonico semplice, moto circolare, moto circolare uniforme, composizione di moti armonici, figure di Lassajou. Problema della parabola di sicurezza.

**C.** Atlante, carta, coordinate curvilinee, coordinate cilindriche, rappresentazione cilindrica del moto.

Lezioni 9 – 12 (7 ottobre 2014)

**C.** Coordinate polari e rappresentazione polare del moto.

**D.** Trasformazione di coordinate euclidea, rotazione e traslazione. Angoli di Cardano e angoli di Eulero.

Lezioni 13 – 16 (10 ottobre 2014)

**D.** Moto di trascinamento, riferimento fisso e mobile, punto e vettore solidale. Velocità angolare, regola di trasformazione, formule di Poisson, derivata di un vettore, esempi.

Lezioni 17 – 20 (14 ottobre 2014)

**D.** Classificazione dei moti di trascinamento. Quietè. Moto traslatorio, moto traslatorio uniforme, trasformazioni di Galileo. Moto sferico. Moto rotatorio. Condizioni necessarie e sufficienti per i diversi moti; equazione della trasformazione di coordinate associata ai riferimenti fisso e mobile. Legge di composizione delle velocità angolari. Applicazioni: velocità angolare di un moto sferico in termini degli angoli di Eulero e di Cardano.

**D.** Moto delle immagini dei punti solidali all'osservatore mobile: legge oraria, velocità e accelerazione. Moto assoluto e moto relativo di un elemento: relazione tra le equazioni componenti del moto assoluto e di quello relativo. Teorema del moto relativo, velocità di trascinamento, esempio del pick-up tangenziale.

Lezioni 21 – 24 (17 ottobre 2014)

**D.** Teorema di Coriolis e accelerazione di Coriolis. Esempio della ruota panoramica. Esempio: moto dei pianeti relativo alla Terra; moto retrogrado.

**E.** Sistema di particelle libere, richiami sulle leggi del moto per un sistema libero e isolato, leggi di Newton e principio di relatività galileano; sollecitazione interna. Sistema libero e non isolato; sollecitazione esterna. Moto rispetto a un osservatore non inerziale; sollecitazione fittizia, di trascinamento, di Coriolis e centrifuga. Esempi. Equazione fondamentale della statica per sistemi liberi.

Lezioni 25 – 28 (21 ottobre 2014)

**F.** Elemento libero isolato e non isolato: elemento libero rispetto a un osservatore inerziale e rispetto a uno in moto rotatorio uniforme, moto in presenza di campi elettrici. Elemento libero isolato e non isolato: moto in presenza di campi elettrici e magnetici, elemento libero sulla superficie terrestre, peso, effetto della forza di Coriolis sulla caduta del grave, caduta libera rispetto a osservatori in caduta libera. Il problema delle maree, effetto del Sole e della Luna.

Lezioni 29 – 32 (24 ottobre 2014)

**J.** Sistemi meccanici conservativi unidimensionali, legge di conservazione. Esempi. Sistemi meccanici conservativi unidimensionali, legge di conservazione, piano delle fasi, orbita o traiettoria di fase, ritratto delle fasi, punti fissi o critici, stabilità dei punti fissi, formula di quadratura, analisi qualitativa, curve di livello dell'energia generalizzata, periodo delle orbite periodiche, separatrice, orbite asintotiche, omoclina ed eteroclina.

**E.** Sistema di elementi vincolato: reazione e sollecitazione vincolare. Equazione fondamentale della statica per sistemi vincolati.

Vincoli di posizione. Sistemi olonomi: coordinate lagrangiane, vincoli scleronomi, vincoli reonomi, gradi di libertà, coordinate lagrangiane essenziali, equazioni di vincolo.

Lezioni 33 – 36 (28 ottobre 2014)

**E.** Sistemi olonomi: spostamento possibile, spostamento effettivo, spostamento virtuale. Vincoli unilaterali: configurazioni ordinarie e di confine, spostamento possibile e virtuale.

Vincoli anolonomi: vincolo integrabile e vincolo propriamente anolonomo. Velocità lagrangiane.

Modelli di vincolo. Vincolo ideale: lavoro elementare possibile, lavoro elementare virtuale, componenti lagrangiane della sollecitazione, lavoro elementare effettivo. Appoggio e appartenenza di un elemento a una superficie: coefficiente di attrito statico e dinamico, legge di Coulomb–Morin.

**F.** Elemento vincolato: guida liscia e scabra, guida rettilinea scabra orizzontale. Guida rettilinea scabra inclinata. Pendolo semplice, pendolo cicloidale. Elemento appoggiato a una superficie liscia e scabra: superficie piana in moto rispetto a un osservatore terrestre, superficie sferica liscia (problema del distacco), statica dell'elemento appoggiato a una superficie sferica scabra. Oscillatore armonico smorzato, forzato e risonanza.

Lezioni 37 – 40 (31 ottobre 2014)

**G.** Quantità di moto, momento della quantità di moto o momento angolare, energia cinetica. Centro di massa, moto del centro di massa, velocità e accelerazione del centro di massa. Osservatore del centro di massa, legame tra le grandezze cinematiche del moto assoluto del sistema e del moto relativo all'osservatore del centro di massa. Equazioni globali della dinamica dei sistemi, leggi di conservazione per i sistemi isolati e liberi, sollecitazione autonoma, teorema del centro di massa. Seconda equazione globale con polo mobile.

**H.** Sistema olonomo a vincoli perfetti: velocità, accelerazione ed energia cinetica in termini delle coordinate lagrangiane, matrice di massa e relative proprietà. Definizione di momento coniugato. Principio di d'Alembert e prima forma delle equazioni di Lagrange. Seconda forma delle equazioni di Lagrange. Esempi: pendolo semplice.

Lezioni 41 – 44 (4 novembre 2014)

**H.** Deduzione della seconda forma delle equazioni di Lagrange e loro sufficienza per la descrizione dei moti del sistema olonomo a vincoli perfetti. Sistemi olonomi conservativi. Sollecitazioni conservative in senso lagrangiano, energia potenziale lagrangiana, equazioni di Lagrange per i sistemi olonomi conservativi. sollecitazioni a lavoro virtuale nullo, sollecitazioni posizionali, sollecitazioni conservative in senso proprio. Energia potenziale di una sollecitazione conservativa in senso proprio. Esempi: sollecitazione elastica esterna e interna, sollecitazione peso e sollecitazione centrifuga. Esempio: pendolo semplice, analisi qualitativa, calcolo della forza vincolare.

Lezioni 45 – 48 (7 novembre 2014)

**H.** Definizione di momento coniugato, energia meccanica generalizzata ed energia meccanica totale. Relazione tra energia e energia generalizzata; variazione dell'energia generalizzata lungo i moti naturali. Integrali primi: momenti coniugati, energia meccanica generalizzata ed energia meccanica totale. Esempio: pendolo sferico, analisi qualitativa, moti particolari, calcolo della forza vincolare, problema del distacco.

**I.** Statica dei sistemi olonomi: principio dei lavori virtuali. Statica di sistemi olonomi a vincoli scleronomi: caso dei sistemi olonomi conservativi. Stabilità dell'equilibrio:

definizione di equilibrio stabile e instabile, teorema di Dirichlet–Lagrange (senza dimostrazione), teorema di Liapunov (senza dimostrazione). Esempi: moto del pendolo sottoposto all’azione di una forza elastica.

Lezioni 49 – 52 (11 novembre 2013)

**I.** Esempi: moto del pendolo rotante rispetto all’osservatore terrestre e a quello non inerziale. Diagrammi di stabilità e biforcazione.

**K.** Corpo rigido, riferimento solidale, elemento, retta, piano solidale, rappresentazione cartesiana, numero di gradi di libertà, velocità angolare, velocità del generico elemento. Esempio: disco vincolato a un piano. Classificazione dei moti rigidi: traslatorio, sferico e rotatorio. Proprietà. Atto di moto rigido, formula fondamentale della cinematica rigida, trinomio invariante. Classificazione dell’atto di moto rigido: traslatorio e rotatorio. Asse istantaneo di rotazione. Teorema di Mozzi e asse di Mozzi. Moto rigido di contatto, velocità di strisciamento, atto di moto senza strisciamento, di puro rotolamento e di imperniamento. Velocità assoluta e relativa del punto di contatto. Vincolo di assenza di strisciamento come vincolo anolonomo integrabile e non integrabile. Esempi: ruota sulla rotaia rettilinea, ruota sulla rotaia circolare.

Lezioni 53 – 56 (14 novembre 2014)

**K.** Esempi moto con assenza di strisciamento: sfera appoggiata sul piano, cilindro appoggiato su un piano e cono appoggiato su un piano. Moto rigido piano: definizione. Proprietà dell’atto di moto rigido di un moto rigido piano. Moto rigido piano: centro di istantanea rotazione. Teorema di Chasles. Base e rulletta, moto rigido piano come moto rigido di contatto. L’ellissografo.

**L.** Centro di massa di un corpo rigido, proprietà di ubicazione, corpi forati. Momento d’inerzia di un corpo rigido, Teorema di Huygens, proprietà di additività e corpi forati. Matrice d’inerzia, prodotti d’inerzia, tensore d’inerzia, diagonalizzazione del tensore d’inerzia, riferimento, assi e momenti principali d’inerzia, riferimento, assi e momenti centrali d’inerzia, corpi a simmetria sferica, corpi a simmetria cilindrica o giroscopica, matrice d’inerzia per i corpi piani, proprietà di simmetria della distribuzione della massa e assi principali d’inerzia, ellissoide d’inerzia. Energia cinetica di un corpo in moto rigido; esempi: cilindro che rotola senza strisciare e cono che rotola senza strisciare. Energia cinetica e momento totale della quantità di moto di un corpo rigido in moto sferico.

Lezioni 57 – 60 (18 novembre 2014)

**L.** Matrice d’inerzia, prodotti d’inerzia, tensore d’inerzia, diagonalizzazione del tensore d’inerzia, riferimento, assi e momenti principali d’inerzia, riferimento, assi e momenti centrali d’inerzia, corpi a simmetria sferica, corpi a simmetria cilindrica o giroscopica, matrice d’inerzia per i corpi piani, proprietà di simmetria della distribuzione della massa e assi principali d’inerzia, ellissoide d’inerzia. Energia cinetica di un corpo in moto rigido; esempi: cilindro che rotola senza strisciare e cono che rotola senza strisciare. Energia cinetica e momento totale della quantità di moto di un corpo rigido in moto sferico.

Lezioni 61 – 64 (21 novembre 2014)

**M.** Modelli di vincolo perfetto per i sistemi rigidi: rotolamento senza strisciamento, appoggio liscio, giunto ideale, cerniera ideale e collare cilindrico. Applicazione del formalismo lagrangiano ai sistemi rigidi. Esempi: moto rotatorio di un corpo rigido pesante sottoposto a una forza elastica rispetto a un osservatore terrestre e a uno non inerziale, moto di una sbaretta pesante vincolata mediante uno snodo liscio e sottoposta all'azione di una forza elastica, moto del bipendolo, moto di puro rotolamento di un cilindro rispetto a un osservatore terrestre e rispetto a un osservatore non inerziale, sistemi con sollecitazioni dipendenti dal tempo.