

Modelli Matematici per la Meccanica - canale LZ - 9 CFU
Laurea in Ingegneria Aerospaziale - Roma
Docenti: A. Barra, E.N.M. Cirillo - Anno Accademico: 2025-2026

Programma

- L00** Prerequisiti di algebra lineare (spazi vettoriali), richiami di geometria (spazi puntuali euclidei) e curve [1, Appendici A e B] e [7].
- L02** Sollecitazioni e campo momento [1, Capitoli 1 e 17].
- L03** Trasformazioni di coordinate [1, Capitolo 2].
- L04** Cinematica degli osservatori [1, Capitolo 3] e [5].
- L05** Moti relativi [1, Capitolo 4] e [5].
- L01** Leggi della meccanica [1, Capitolo 1] e [5, 12].
- L08** Sistemi vincolati [1, Capitolo 7].
- L10** Proprietà generali dei sistemi di particelle [1, Capitolo 9] e [5].
- L11** Dinamica dei sistemi olonomi: equazioni di Lagrange [1, Capitolo 10] e [5].
- L12** Statica dei sistemi olonomi: equilibrio e stabilità [1, Capitolo 12] e [5].
- L13** Cinematica del corpo rigido: il moto e l'atto di moto [1, Capitolo 14] e [5].
- L14** Corpo rigido: geometria delle masse [1, Capitolo 15] e [5].
- L15** Dinamica e statica del corpo rigido: formalismo lagrangiano [1, Capitolo 16] e [5].
- L16** Sistemi oscillanti [1, Capitolo 13] e [5].
- L17** Dinamica del corpo rigido e statica: equazioni cardinali [1, Capitolo 17] e [5].
- L18** Corpo rigido con un punto fisso: cerniera [1, Capitolo 17] e [5].
- L19** Corpo rigido con un punto fisso: moti alla Poinsot [1, Capitolo 17] e [5].
- L21** Corpo rigido appoggiato a una superficie liscia [1, Capitolo 17] e [5].
- L22** Sfera appoggiata a una superficie scabra [1, Capitolo 17] e [12].
- S01** Sistemi dinamici uni-dimensionali [2, Capitolo 1]
- S02** Teoria generale del problema di Cauchy [2, Capitolo 2]
- S03** Sistemi di equazioni differenziali lineari [2, Capitolo 3]
- S04** Comportamenti asintotici, equilibrio e ritratti di fase [2, Capitolo 4 e 5]

Testi consigliati

- [1] Emilio N.M. Cirillo, “Appunti delle Lezioni di Meccanica Razionale per l’Ingegneria.” Edizioni CompoMat, 2018, Configni (Ri).
- [2] Daniele Andreucci, Emilio N.M. Cirillo, “Sistemi di equazioni differenziali ordinarie.” Edizioni CompoMat, Configni (Rieti), 2025. ISBN: 978-88-95706-59-7.

Esercitazioni ed esempi di prove d’esame

Sul sito google classroom sono reperibili alcune esercitazioni, suddivise per argomenti. Non è sempre distribuita la soluzione.

Gli studenti sono invitati a svolgere questi esercizi durante o al termine del corso e a discutere con il docente le eventuali difficoltà incontrate.

Diario delle lezioni aggiornato al 16 dicembre 2025 con riferimenti a [1,2]

Lezioni 1 – 2 (22 settembre 2025)

S01 Introduzione al corso. Capitolo 1.1: Definizioni Generali: Def. 1.1, Oss. 1.2, Ex. 1.3, Ex. 1.4, Def. 1.5, Def. 1.6, Oss. 1.7, Def. 1.8, Oss. 1.9, Ex. 1.10, Ex. 1.11, Thm. 1.12. Capitolo 1.2: Separazione di Variabili: generalità, Ex. 1.13, Ex. 1.14.

Lezioni 3 – 4 (23 settembre 2025)

L00 Paragrafi A.3 spazi vettoriali, A.4 spazi vettoriali euclidei, A.5 spazi vettoriali euclidei tridimensionali. B.1 spazi puntuali.

Lezioni 5 – 6 (24 settembre 2025)

L00 Paragrafi B.1 spazi puntuali, B.2 isometrie.

L02 Paragrafi 1.4 proprietà generali delle sollecitazioni e campo momento.

Lezioni 7 – 8 (25 settembre 2025)

L02 Paragrafi 1.4 proprietà generali delle sollecitazioni e campo momento, 17.2 sollecitazioni equivalenti (esempio del peso).

L03 Paragrafi 2.1 trasformazioni di coordinate cartesiane, 2.2 trasformazioni particolari (traslazione e rotazione).

Lezioni 9 – 10 (29 settembre 2025)

S01 Lemma 1.18 (Disuguaglianza di Gronwall), Cor. 1.19, Oss. 1.21. Cap.1.3: Def. 1.24 (punto fisso), Thm. 1.25. Sez. 1.3.1 (Studio qualitativo delle curve integrali). Lemma 1.26, Cor. 1.27, Def. 1.28, Ex. 1.30, Ex. 1.31, Oss. 1.32.

Lezioni 11 – 12 (30 settembre 2025)

L03 Paragrafo 2.2.2 angoli di Eulero, 2.2.1 angoli di Cardano,

L04 Paragrafo 3.1 moto di trascinamento.

Lezioni 13 – 14 (1 ottobre 2025)

L04 Paragrafi 3.1 moto di trascinamento, 3.2 velocità angolare, teorema di Poisson, proprietà e esempio 3.1.

Lezioni 15 – 16 (2 ottobre 2025)

L04 Paragrafi 3.2 esempio 3.2, 3.3 classificazione dei moti di trascinamento, 3.4 moto relativo e assoluto di un osservatore (composizione delle velocità angolari).

Lezioni 17 – 18 (6 ottobre 2025)

S01 Sez: 1.3 Ex. 1.31 (Verhuslt) Oss. 1.32 (inesistenza moti periodici), Ex. 1.35, Sez: 1.4. Thm. 1.36 (esistenza soluzione) Cor. 1.39 (unicità soluzione), Def. 1.40 (Lipschitz), Lemma 1.41, Thm. 1.43 (unicità con Lipschitz+Gronwall e con Lipschitz più var.sep.). Lezione Due Sez: 1.2. Lemma 1.18 (disuguaglianza di Gronwall), Cor. 1.19. Sez: 1.3. Def. 1.24 (studio qualitativo delle curve integrali), Lemma 1.26, Cor. 1.27, Def. 1.28, Ex. 1.29, Ex. 1.30.

Lezioni 19 – 20 (7 ottobre 2025)

L04 Paragrafo 3.4 moto relativo e assoluto di un osservatore (composizione delle velocità angolari).

L05 Paragrafo 4.1 moto di un punto solidale a un osservatore mobile, 4.2 moto assoluto e relativo di un elemento.

Lezioni 21 – 22 (8 ottobre 2025)

L01 Paragrafi 1.1 cinematica, 1.2 dinamica, 1.3 statica.

L01 Paragrafo sistemi di riferimento non inerziali.

Lezioni 23 – 24 (9 ottobre 2025)

L10 Paragrafi 9.1 centro di massa, 9.2 riferimento del centro di massa.

L08 Paragrafi 7.1 cinematica dei vincoli.

Lezioni 25 – 26 (13 ottobre 2025)

S01 Sec. 1.4: Oss. 1.37 e Ex. 1.38 (Tempi di percorrenza e loro stime). Cor. 1.39. Sec. 1.5: Def. 1.44, Thm. 1.45 (Dipendenza Continua), Cor. 1.46, Ex. 1.47. Sec. 1.6: ODE I ordine: integrale generale.

Lezioni 27 – 28 (14 ottobre 2025)

L08 Paragrafi 7.2 dinamica dei sistemi vincolati, 7.3 statica dei sistemi vincolati.

L10 Paragrafo 9.3 equazioni globali della dinamica dei sistemi. Teorema del lavoro e dell'energia cinetica.

Lezioni 29 – 30 (15 ottobre 2025)

L08 Paragrafi 7.4 classificazione dei vincoli, 7.5 modelli di vincolo.

Lezioni 31 – 32 (16 ottobre 2025)

S01 Sec. 1.6: ODE I ord (integrale generale). Ex. 1.56 (in tre modi diversi). Sec. 1.7: Thm. 1.57 (Teorema del confronto), Ex. 1.58 (resistenza variabile), Corr. 1.60, Thm. 1.63 (Esplosione in tempo finito), Ex. 1.65. Sec. 1.8: Ex. 1.66. Per casa: Ex. 1.67 e 1.69 e Ex. 1.70 e Ex. 1.71.

Lezioni 33 – 34 (20 ottobre 2025)

S03 Sec. 3.1: ODE teoria. Thm. 3.2 (Integrale Generale), Ex. 3.3. Sec. 3.1.1. (il caso dei coefficienti costanti: polinomio caratteristico, costruzione dell'integrale generale in ragione del tipo di autovalori del polinomio caratteristico): Lemma 3.4. Ex. 3.5: oscillatore forzato (forzante esponenziale). Ex 3.6: oscillatore forzato (caso risonante, caso non risonante e limite di indistinguibilità).

Lezioni 35 – 36 (21 ottobre 2025)

L08 Paragrafo 7.5 modelli di vincolo.

L00 Paragrafo B.3 curve regolari (triedro principale e formule di Frenet).

L09 Paragrafi 8.2 elemento vincolato a una guida rettilinea.

Lezioni 37 – 38 (22 ottobre 2025)

L09 Paragrafi 8.3 elemento vincolato a una guida curvilinea, 8.4 elemento vincolato a una superficie (problema del distacco), 8.5 oscillatore lineare.

L11 Paragrafi 10.1 e 10.2 osservabili cinematiche e coordinate lagrangiane (teorema sulla matrice di massa senza dimostrazione).

Lezioni 39 – 40 (23 ottobre 2025)

L11 Paragrafi 10.3 prima forma delle equazioni di Lagrange, 10.4 seconda forma delle equazioni di Lagrange.

Lezioni 41 – 42 (27 ottobre 2025)

S02 Esercitazione sulle EDO. Teoria: sistemi di ODE. Sez. 2.1.1: abbassamento d'ordine di un'equazione (con esempi espliciti dalla Fisica). Sez. 2.1.2.: Lipschitz vettoriale. Lemma 2.8, Lemma 2.9 (Gronwall vettoriale). Sez. 2.2 (soluzioni locali): Thm. 2.10 (esistenza), Def. 2.13, Thm. 2.14, Cor. 2.16 (unicità).

S03 Inizio dello studio dei sistemi di equazioni differenziali: caso lineare ed omogeneo. Capitolo Tre: prime definizioni (computo della costante di Lipschitz nei sistemi lineari a coefficienti continui nel tempo).

Lezioni 43 – 44 (28 ottobre 2025)

L11 Paragrafi 10.5 sollecitazioni a lavoro virtuale nullo, 10.6 sistemi olonomi conservativi.

Lezioni 45 – 46 (29 ottobre 2025)

L11 Paragrafi 10.7 integrali primi del moto, 10.8 leggi di conservazione per sistemi olonomi conservativi, Esempi 10.13 e 10.14.

Lezioni 47 – 48 (30 ottobre 2025)

L12 Paragrafi 12.1 statica dei sistemi olonomi, 12.2 stabilità dell'equilibrio, teorema di Dirichlet con dimostrazione rimandata e teorema di Liapunov senza dimostrazione. Esempi 12.1, 12.2.

Lezioni 49 – 50 (3 novembre 2025)

S03 Sistemi di ODE: Sez. 3.2: Sistemi lineari omogenei. Intro. Thm. 3.17, Lemma 3.18, Cor. 3.19, Esercizi (sistemi 2×2). Thm. 3.21, Cor. 3.22. Sez. 3.4: sistemi lineari a coefficienti costanti. Primo metodo di calcolo dell'integrale generale (casi di autovalori distinti -reali o complessi- con esercizi di pertinenza). Focus sul caso dell'oscillatore armonico.

Lezioni 51 – 52 (4 novembre 2025)

L12 Esempio 12.3.

L13 Paragrafi 14.1 corpo rigido, 14.2 moti rigidi particolari, 14.3 atto di moto rigido, 14.4 classificazione degli atti di moto rigido.

Lezioni 53 – 54 (5 novembre 2025)

L13 Paragrafi 14.4 classificazione degli atti di moto rigido, 14.5 moto rigido di contatto.

Lezioni 55 – 56 (6 novembre 2025)

L13 Paragrafi 14.5 moto rigido di contatto, 14.6 moto rigido piano, 14.7 moto rigido sferico: precessione.

Lezioni 57 – 58 (10 novembre 2025)

S03 Sistemi di ODE: Sez. 3.4 (3.4.1 e 3.4.2): Calcolo dell'integrale generale in ragione dello spettro degli autovalori. Focus sul caso di autovalori coincidenti: autovettori generalizzati. Sistemi di ODE forzati. Esercizi per casa: 3.63 e 3.64. Il riduzionismo in meccanica: il ruolo archetipale dell'oscillatore armonico.

Lezioni 59 – 60 (11 novembre 2025)

L13 Paragrafi 14.7 moto rigido sferico: precessione.

L14 Paragrafi 15.1 centro di massa di un corpo rigido.

Lezioni 61 – 62 (12 novembre 2025)

L14 Paragrafi 15.2 momento d'inerzia, 15.3 matrice d'inerzia (complementi di geometria delle masse: Teorema di Huygens per i prodotti d'inerzia).

Lezioni 63 – 64 (13 novembre 2025)

L14 Paragrafi 15.4 grandezze cinematiche e matrice d'inerzia, 15.5 tensore d'inerzia,

Lezioni 65 – 66 (17 novembre 2025)

S03 Matrici di transizione e matrice esponenziale: Lemma 3.24, Def. 3.25, Lemma 3.26, Thm. 3.27, Thm. 3.30, Ex. 3.31, Thm. 3.32, Thm. 3.33, Thm. 3.35, Thm. 3.40, esempi espliciti. Per casa: calcolo della matrice esponenziale per l'oscillatore armonico con tempo iniziale nullo.

Lezioni 67 – 68 (18 novembre 2025)

L14 Paragrafo 15.6 ellissoide d'inerzia.

L15 Paragrafi 16.1 sistemi rigidi vincolati (cerniera, giunto e collare), 16.2 esercizi ricapitolazione su corpo rigido con almeno un punto fisso (cerniera e bilanciamento).

Lezioni 69 – 70 (19 novembre 2025)

S04 Cap. IV: Sez.4.1 integrali primi, simmetrie e quantità conservate. Def. 4.1, Def. 4.2 (orbita e grafico), Oss. 4.3 (sistemi autonomi). Piano delle fasi e ritratto di fase (con

esempi: oscillatore e doppia buca). Thm. 4.61 (moti 1D con $F=F(x)$ sono conservativi; se è presente l'attrito, allora E-punto $\neq 0$). Oss. 4.4 (Sol. Periodiche), Lemma 4.5, Ex. 4.7, Def. 4.9: integrale primo. Teorema di Noether: invarianze della Lagrangiana ed integrali primi (cenni). Cap. IV: Sez.4.2: Equilibrio. Def. 4.13, Oss. 4.14, Lemma 4.15.

Lezioni 71 – 72 (20 novembre 2025)

L15 Paragrafi 16.2 esercizi ricapitolazione su corpo rigido con almeno un punto fisso (cerniera, bilanciamento, cerniere incrociate).

Lezioni 73 – 74 (24 novembre 2025)

S04 Sez. 4.2: equilibrio. Def. 4.14, Oss. 4.15, Lemma 4.16, Def. 4.17 e Def. 4.18 (equilibrio stabile, instabile e asintoticamente stabile). Sez.4.3: Thm. 4.24, Ex. 4.25, Ex. 4.26, Ex. 4.27. Classificazione dei punti di equilibrio (nodi, selle, centri e fuochi): esercizi di pertinenza.

Lezioni 75 – 76 (25 novembre 2025)

L16 Paragrafi 13.1 coppia di oscillatori interagenti (oscillatori lineari, battimenti, non lineari).

Lezioni 77 – 78 (26 novembre 2025)

L16 Paragrafo 13.3 piccole oscillazioni con esempio del bipendolo.

Lezioni 79 – 80 (27 novembre 2025)

L16 Paragrafo 13.3 bipendolo.

L17 Paragrafi 17.1 equazioni cardinali per il corpo rigido libero.

L18 Paragrafi 17.5 corpo rigido con punto fisso (cerniera).

Lezioni 81 – 82 (2 dicembre 2025)

L18 Paragrafo 17.5 corpo rigido con punto fisso (cerniera),

L19 Paragrafi 17.5.1 moto alla Poincaré: definizione esempi, equazioni di Eulero, leggi di conservazione, rotazioni permanenti, 17.5.2 stabilità delle rotazioni permanenti.

Lezioni 83 – 84 (3 dicembre 2025)

L19 Paragrafo 17.5.2 stabilità delle rotazioni permanenti.

L21 Paragrafo 17.6 corpo rigido appoggiato su piano liscio.

Lezioni 85 – 86 (4 dicembre 2025)

S04 Sez. 4.4: Stabilità in sistemi dinamici non lineari. Il linearizzato ed il teorema di stabilità lineare (Thm. 4.30). Def. 4.34 (Funzione di Lyapunov) e Thm. 4.36 (Teorema di Lyapunov). Applicazioni al pendolo, sia conservativo (Ex. 4.43) che dissipativo (Ex. 4.44). Applicazioni dei sistemi dinamici 1: il modello SIR, il fenomeno dell'immunità di gregge.

Lezioni 87 – 88 (9 dicembre 2025)

L21 Paragrafo 17.6 corpo rigido appoggiato su piano liscio.

Lezioni 89 – 90 (10 dicembre 2025)

L22 Paragrafo 17.7 sfera appoggiata su un piano scabro.

Esempi ed esercizi di ricapitolazione: cerniera in presenza di sollecitazione a momento costante.

Lezioni 91 – 92 (11 dicembre 2025)

S04 Il sistema dinamico di Lotka-Volterra: studio completo (dall'integrale primo alla stabilità dei punti di equilibrio, dalle curve di livello alle soluzioni esplicite del linearizzato nell'equilibrio stabile). Sez. 4.6: Sistemi del II ordine e stabilità alla Dirichlet. Def. 4.46, Def. 4.47, Def. 4.48. Thm. 4.51 (Stabilità di Dirichlet), Thm. 4.57 (Stabilità asintotica di Dirichlet), Thm. 4.59 (Instabilità di Dirichlet), [senza dimostrazione, solo gli enunciati]. Esercizi su forzanti e stabilità.

Lezioni 93 – 96 (15 dicembre 2025)

S04 Il fenomeno del chaos deterministico: l'esempio della mappa logistica per $r = 4$. Esercizi d'esame.

Lezioni 97 – 98 (16 dicembre 2025)

Esempi ed esercizi di ricapitolazione: quesito 19.5.

Testi suggeriti per eventuali approfondimenti

- [3] D. Andreucci, “Meccanica Razionale – Modelli Matematici per l'Ingegneria.” Edizioni La Dotta, 2019, Bologna.
- [4] V.I. Arnold, “Metodi Matematici della Meccanica Classica.” Editori Riuniti, 1986.
- [5] P. Benvenuti, P.G. Bordoni, G. Maschio, “Lezioni di Meccanica Razionale.” Edizioni CompoMat, 2010, Configni (Ri).
- [6] P. Benvenuti, G. Maschio, “Esercizi di Meccanica Razionale.” Edizioni CompoMat, 2011, Configni (Ri).
- [7] W.E. Deskins, “Abstract Algebra.” The MacMillan Company, 1964, New York.
- [8] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, A.T. Fomenko, “Geometria delle superfici, dei gruppi di trasformazioni e dei campi.” Volume primo. Editori Riuniti, Edizioni Mir, Mosca, 1986.
- [9] G. Gallavotti, “Meccanica elementare.” Boringhieri, Torino, 1986.
- [10] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, “Meccanica Classica.” Zanichelli, 2005, Bologna.
- [11] L. Landau, E. Lifchitz, “Meccanica,” tomo 1 della collezione “Fisica Teorica.” Mir, 1964, Mosca.
- [12] T. Levi-Civita, U. Amaldi, “Lezioni di Meccanica Razionale.” Edizioni CompoMat, 2012, Configni (Ri).
- [13] E. Olivieri, “Appunti di Meccanica Razionale.” UniTor, 1991, Roma.

[14] J.R. Taylor, “Meccanica Classica.” Zanichelli, 2006, Bologna.

Esame

L'esame consiste in una prova scritta e un colloquio orale. Lo scritto è costituito da due esercizi, un classico problema di Meccanica Razionale con 10 domande e un esercizio sui sistemi di equazioni differenziali ordinarie con 5 domande. Le domande sono a risposta multipla con quattro opzioni di risposta. Per l'accesso all'orale si deve conseguire un punteggio maggiore o uguale a 17. Per ciascuna domanda sono attribuiti 2 punti in caso di risposta corretta, -0,5 punti in caso di risposta errata, e nessun punteggio qualora non venga fornita alcuna risposta. Il colloquio orale si svolge immediatamente dopo la correzione della prova scritta sulla base del calendario predisposto dal docente.

Per lo svolgimento della prova scritta, che avrà la durata di due ore, gli studenti devono portare in aula tutto il materiale necessario, per esempio, fogli e penne.

La commissione distribuirà solo il testo del compito in formato cartaceo. Le risposte dovranno essere riportate a penna e in stampatello sulla prima pagina del compito che, al termine della prova scritta, dovrà essere consegnato in tutte le sue parti al docente.

Durante la prova scritta è possibile usare tre tomi (libri oppure appunti ben rilegati), mentre è vietato l'uso di appunti su fogli sparsi e di dispositivi elettronici di qualsiasi natura.