SOLUZIONI COMPITO del 8/01/2013
ANALISI MATEMATICA I - 10 CFU
ENERGETICA

TEMA

Esercizio 1

Effettuando una sostituzione in coordinate polari centrate in $(0,1)$, si ricava

$$\iint_D x\sin(x^2+y^2-2y+1)^{3/2}\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{E}} r\cos\theta\sin[(r^2)^{3/2}]r\,dr\,d\theta = \iint_{\widetilde{E}} r^2\sin(r^3)\cos\theta\,dr\,d\theta\,,$$

dove $\widetilde{E} = \{(r,\theta)\in[0,+\infty)\times[-\pi,\pi) \;:\; 0\le r\le \pi^{1/3},\ \theta\in[-\pi/4,\pi/4]\}$. Utilizzando la formula di integrazione per riduzione si ottiene

$$\iint_{\widetilde{E}} r^2\sin(r^3)\cos\theta\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{\pi^{1/3}} r^2\sin(r^3)\,dr\right)\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta\,d\theta\right) = \left(-\frac{\cos r^3}{3}\Big|_0^{\pi^{1/3}}\right)\left(\sin\theta\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,.$$

Esercizio 2

Innanzitutto osserviamo che il termine generale della serie proposta è non negativo e può essere riscritto nella forma

$$a_n := \mathrm{e}^{\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\ \log\left[1+\sin\frac{1}{(n+2)^2}\right]}\,.$$

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t\mapsto\log(1+t)$ e per la funzione $t\mapsto\sin t$, con $t=\frac{1}{n}$, otteniamo

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim-\frac{1}{2n^2}\,.\end{aligned}$$

Inoltre, ricordando che

$$\log\left[1+\sin\frac{1}{(n+2)^2}\right]\sim\sin\frac{1}{(n+2)^2}\sim\frac{1}{(n+2)^2}\sim\frac{1}{n^2}\,,$$

ricaviamo

$$\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\ \log\left[1+\sin\frac{1}{(n+2)^2}\right]\sim-2n^2\frac{1}{n^2}\to-2\,.$$

Da ciò otteniamo che $a_n\to 1/\mathrm{e}^2\neq 0$; pertanto, non essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza, la serie proposta diverge.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2+\lambda-2=0$. Essa ha come soluzioni $\lambda=1;-2$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$. Dal metodo di somiglianza otteniamo che, per $\alpha\neq\pm1$, una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x)=A\mathrm{e}^{\alpha^2x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$A\alpha^4\mathrm{e}^{\alpha^2x}+A\alpha^2\mathrm{e}^{\alpha^2x}-2A\mathrm{e}^{\alpha^2x}=2\mathrm{e}^{\alpha^2x}\quad\Longrightarrow\quad A(\alpha^4+\alpha^2-2)=2\,,$$

da cui $A = 2/(\alpha^4 + \alpha^2 - 2)$. Se, invece, $\alpha = \pm 1$, sempre utilizzando il metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^x$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$2A\mathrm{e}^x + Ax\mathrm{e}^x + A\mathrm{e}^x + Ax\mathrm{e}^x - 2Ax\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad 3A = 2\,,$$

da cui $A = 2/3$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = \begin{cases} C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{2}{\alpha^4+\alpha^2-2}\,\mathrm{e}^{\alpha^2 x} & \text{se } \alpha \neq \pm 1; \\ C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{2}{3}\,x\,\mathrm{e}^x & \text{se } \alpha = \pm 1. \end{cases}$$

Esercizio 4

Per determinare il campo di esistenza E della funzione proposta, dobbiamo imporre le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \left|\log^2(2x+1) - 3\log(2x+1)\right| \neq 0\,, \\ 2x+1 > 0\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \log(2x+1)(\log(2x+1) - 3) \neq 0\,, \\ x > -1/2\,, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0\,,\ x \neq \dfrac{\mathrm{e}^3 - 1}{2}\,, \\ x > -1/2\,. \end{cases}$$

Quindi, $E = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\mathrm{e}^3-1}{2}\right) \cup \left(\frac{\mathrm{e}^3-1}{2}, +\infty\right)$. Inoltre

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty & \Longrightarrow & x = -1/2 \text{ è asintoto verticale;} \\ \lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) = -\infty & \Longrightarrow & x = 0 \text{ è asintoto verticale;} \\ \lim\limits_{x\to \frac{\mathrm{e}^3-1}{2}^\pm} f(x) = -\infty & \Longrightarrow & x = \frac{\mathrm{e}^3-1}{2} \text{ è asintoto verticale;} \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \log(\log^2 x) = +\infty & \Longrightarrow & \text{non c'è asintoto orizzontale né obliquo.} \end{array}$$

Esercizio 5

L'affermazione (A) è corretta, poiché per ipotesi $a_n b_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = o(1)\frac{1}{n^{3/2}} \leq C\frac{1}{n^{3/2}}$ e la serie armonica generalizzata di termine $\frac{1}{n^{3/2}}$ converge.
L'affermazione (B) è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n\sqrt{\log n}}$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, da cui si ricava $\frac{a_n^2}{b_n^2} = \frac{1}{n\log n}$, che è il termine generale di una serie divergente.
L'affermazione (C) è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n\log n}$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, da cui si ricava $\left|(-1)^n\frac{a_n^2}{b_n^2}\right| = \frac{1}{n\log^2 n}$, che è il termine generale di una serie convergente.
L'affermazione (D) è corretta, poiché per ipotesi $\frac{b_n^2}{a_n^2} = \frac{1}{o\left(\frac{1}{n}\right)} \to +\infty$, quindi non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza.