SOLUZIONI COMPITO del 3/07/2014
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno non negativo (indipendentemente dal valore del parametro reale x). Inoltre, utilizzando, ad esempio, il criterio della radice otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{|x^2-3|^n}{2^n(n+1)}} \sim \frac{|x^2-3|}{2}\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \to \frac{|x^2-3|}{2}\begin{cases} <1 & \text{se } -2<x^2-3<2 & \iff 1<x^2<5, \\ =1 & \text{se } x^2-3=\pm 2 & \iff x^2=1;5, \\ >1 & \text{se } x^2-3<-2,\ x^2-3>2 & \iff x^2<1,\ x^2>5. \end{cases}$$

Pertanto, per $\{-\sqrt{5}<x<-1\}\cup\{1<x<\sqrt{5}\}$ la serie converge, per $\{x<-\sqrt{5}\}\cup\{-1<x<1\}\cup\{x>\sqrt{5}\}$ la serie diverge, per $x=\pm 1;\pm\sqrt{5}$, il criterio non dà informazioni. Sostituendo, quindi, $x=\pm 1;\pm\sqrt{5}$ nella serie, otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{2^n(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$$

e quest'ultima serie è divergente, poiché il termine generale è asintotico a quello della serie armonica. Concludendo la serie proposta converge per $\{-\sqrt{5}<x<-1\}\cup\{1<x<\sqrt{5}\}$ e diverge per $\{x\leq -\sqrt{5}\}\cup\{-1\leq x\leq 1\}\cup\{x\geq\sqrt{5}\}$.

Esercizio 2

Innanzitutto, calcoliamo l'integrale indefinito della funzione proposta, utilizzando la sostituzione di variable $\cos(2x)=t$, da cui $-2\sin(2x)\,dx=dt$:

$$\begin{aligned}\int \tan^2(2x)\,\sin(2x)\,dx &= \int\frac{\sin^2(2x)}{\cos^2(2x)}\sin(2x)\,dx=\int\frac{1-\cos^2(2x)}{\cos^2(2x)}\sin(2x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int\frac{1-t^2}{t^2}\,dt=-\frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{t^2}\,dt-\int\frac{t^2}{t^2}\,dt\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}-t\right)+C=\frac{1}{2\cos(2x)}+\frac{\cos(2x)}{2}+C\,.\end{aligned}$$

Imponendo la condizione richiesta si ricava

$$3/2=\frac{1}{2\cos(2x)}+\frac{\cos(2x)}{2}+C\Big|_{x=0}=1/2+1/2+C \qquad\Longrightarrow\qquad C=1/2\,.$$

Quindi la primitiva richiesta sarà $\phi(x)=\frac{1}{2\cos(2x)}+\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{1}{2}$.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2-3\lambda+2=0$, che ha come soluzioni $\lambda=1;2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $y_o(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$.

Poiché $\lambda=1$ è soluzione dell'equazione caratteristica, dal metodo di somiglianza otteniamo che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x)=Ax\mathrm{e}^x$, da cui $y_p'(x)=A\mathrm{e}^x+Ax\mathrm{e}^x$ e $y_p''(x)=2A\mathrm{e}^x+Ax\mathrm{e}^x$. Sostituendo nell'equazione completa otteniamo

$$(2A+Ax-3A-3Ax+2Ax)\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x \quad\Longrightarrow\quad -A=2 \quad\Longrightarrow\quad A=-2\,,$$

quindi $y_p(x)=-2x\mathrm{e}^x$ e l'integrale generale dell'equazione proposta è $y(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-2x\mathrm{e}^x$. Imponendo, ora, la condizione richiesta, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{\mathrm{e}^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-2x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{C_1}{\mathrm{e}^x}+C_2-\frac{2x}{\mathrm{e}^x}\right)=C_2\,.$$

Pertanto, il limite richiesto sarà nullo se e solo se $C_2=0$, quindi le soluzioni cercate saranno della forma $y(x)=C_1\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x$ con $C_1\in\mathbb{R}$.

Esercizio 4

Poiché si tratta di una forma di indecisione $[1^\infty]$, utilizzando le proprietà dei logaritmi, riscriviamo il limite proposto nella forma

$$\lim_{x\to1}[\cos(\log x)]^{\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to1} \mathrm{e}^{\log\left([\cos(\log x)]^{\frac{1}{(x-1)^2}}\right)} = \lim_{x\to1} \mathrm{e}^{\frac{1}{(x-1)^2}\ \log[\cos(\log x)]}$$

e studiamo il comportamento dell'esponente. Tenendo conto che, per $y \to 0$, $\log(1+y) \sim y$, con $y = \big(\cos(\log x) - 1\big)$ e $y = x-1$ e $\cos y - 1 \sim -y^2/2$, con $y = \log x$, otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)^2}\ \log[\cos(\log x)] &= \frac{1}{(x-1)^2}\ \log[1+\big(\cos(\log x)-1\big)] \sim \frac{\cos(\log x)-1}{(x-1)^2} \\ &\sim -\frac{\log^2 x}{2(x-1)^2} = -\frac{\log^2[1+(x-1)]}{2(x-1)^2} \sim -\frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2} = -1/2\,.\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\lim_{x\to1}[\cos(\log x)]^{\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to1} \mathrm{e}^{\frac{1}{(x-1)^2}\ \log[\cos(\log x)]} = \mathrm{e}^{-1/2} = 1/\sqrt{\mathrm{e}}\,.$$

Esercizio 5

Tutte le affermazioni sono false, basta prendere $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ nella A) e nella D), con $b_n = a_n^2$; $a_n = \frac{1}{n^4}$ nella B), con $b_n = \sqrt{a_n}$; $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$ nella C).

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno non negativo (indipendentemente dal valore del parametro reale x). Inoltre, utilizzando, ad esempio, il criterio della radice otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{|x^2-4|^n(n+1)^2}} \sim \frac{2}{|x^2-4|}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \to \frac{2}{|x^2-4|}\begin{cases} <1 & \text{se } x^2-4<-2,\ x^2-4>2 \iff x^2<2,\ x^2>6, \\ =1 & \text{se } x^2-4=\pm 2 \iff x^2=2;6, \\ >1 & \text{se } -2<x^2-4<2 \iff 2<x^2<6. \end{cases}$$

Pertanto, per $\{x<-\sqrt{6}\}\cup\{-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\}\cup\{x>\sqrt{6}\}$ la serie converge, per $\{-\sqrt{6}<x<-\sqrt{2}\}\cup\{\sqrt{2}<x<\sqrt{6}\}$ la serie diverge, per $x=\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{6}$, il criterio non dà informazioni. Sostituendo, quindi, $x=\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{6}$ nella serie, otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{2^n(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$

e quest'ultima serie è convergente, poiché il termine generale è asintotico a quello della serie armonica generalizzata con esponente $2>1$.
Concludendo la serie proposta converge per $\{x\le-\sqrt{6}\}\cup\{-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\}\cup\{x\ge\sqrt{6}\}$ e diverge per $\{-\sqrt{6}<x<-\sqrt{2}\}\cup\{\sqrt{2}<x<\sqrt{6}\}$.

Esercizio 2

Innanzitutto, calcoliamo l'integrale indefinito della funzione proposta, utilizzando la sostituzione di variable $\sin(2x)=t$, da cui $2\cos(2x)\,dx=dt$:

$$\begin{aligned}\int\cot^2(2x)\,\cos(2x)\,dx &= \int\frac{\cos^2(2x)}{\sin^2(2x)}\cos(2x)\,dx=\int\frac{1-\sin^2(2x)}{\sin^2(2x)}\cos(2x)\,dx\\ &=\frac{1}{2}\int\frac{1-t^2}{t^2}\,dt=\frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{t^2}\,dt-\int\frac{t^2}{t^2}\,dt\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}-t\right)+C=-\frac{1}{2\sin(2x)}-\frac{\sin(2x)}{2}+C\,.\end{aligned}$$

Imponendo la condizione richiesta si ricava

$$2=-\frac{1}{2\sin(2x)}-\frac{\sin(2x)}{2}+C\Big|_{x=\pi/4}=-1/2-1/2+C \qquad\Longrightarrow\qquad C=3\,.$$

Quindi la primitiva richiesta sarà $\phi(x)=-\frac{1}{2\sin(2x)}-\frac{\sin(2x)}{2}+3$.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2+5\lambda+6=0$, che ha come soluzioni $\lambda=-2;-3$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $y_o(x)=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{-3x}$.
Poiché $\lambda=-2$ è soluzione dell'equazione caratteristica, dal metodo di somiglianza otteniamo che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x)=Ax\mathrm{e}^{-2x}$, da cui $y_p'(x)=A\mathrm{e}^{-2x}-2Ax\mathrm{e}^{-2x}$ e $y_p''(x)=-4A\mathrm{e}^{-2x}+4Ax\mathrm{e}^{-2x}$. Sostituendo nell'equazione completa otteniamo

$$(-4A+4Ax+5A-10Ax+6Ax)\mathrm{e}^{-x}=4\mathrm{e}^{-2x} \quad\Longrightarrow\quad A=4\,,$$

quindi $y_p(x)=4x\mathrm{e}^{-x}$ e l'integrale generale dell'equazione proposta è $y(x)=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{-3x}+4x\mathrm{e}^{-2x}$. Imponendo, ora, la condizione richiesta, otteniamo

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{\mathrm{e}^{-3x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{-3x}+4x\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{-3x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{C_1}{\mathrm{e}^{-x}}+C_2+\frac{4x}{\mathrm{e}^{-x}}\right)=C_2\,.$$

Pertanto, il limite richiesto sarà nullo se e solo se $C_2=0$, quindi le soluzioni cercate saranno della forma $y(x)=C_1\mathrm{e}^{-2x}+4x\mathrm{e}^{-2x}$ con $C_1\in\mathbb{R}$.

Esercizio 4
Poiché si tratta di una forma di indecisione $[0^0]$, utilizzando le proprietà dei logaritmi, riscriviamo il limite proposto nella forma

$$\lim_{x\to 0^+} [\sin(\mathrm{e}^x - 1)]^{\frac{1}{\log x}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\log\left([\sin(\mathrm{e}^x-1)]^{\frac{1}{\log x}}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{\log x}\ \log[\sin(\mathrm{e}^x-1)]}$$

e studiamo il comportamento dell'esponente. Tenendo conto che, per $y \to 0$, $\sin y \sim y$ e $\log(\sin y) \sim \log y$, con $y = \mathrm{e}^x - 1$, e $\mathrm{e}^y - 1 \sim y$, con $y = x$, otteniamo

$$\frac{1}{\log x}\ \log[\sin(\mathrm{e}^x - 1)] \sim \frac{1}{\log x}\ \log(\mathrm{e}^x - 1) \sim \frac{1}{\log x}\ \log x = 1\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{x\to 0^+} [\sin(\mathrm{e}^x - 1)]^{\frac{1}{\log x}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{\log x}\ \log[\sin(\mathrm{e}^x-1)]} = \mathrm{e}\,.$$

Esercizio 5
Tutte le affermazioni sono false, basta prendere $b_n = \sqrt{n}$ nella A) e nella D), con $a_n = b_n^2$; $b_n = n^4$ nella B), con $a_n = \sqrt{b_n}$; $b_n = \sqrt{n}$ e $a_n = n^2$ nella C).

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno non negativo (indipendentemente dal valore del parametro reale x). Inoltre, utilizzando, ad esempio, il criterio della radice otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{3^n}{|x^2-6|^n(n^2+1)}} \sim \frac{3}{|x^2-6|}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \to \frac{3}{|x^2-6|}\begin{cases} <1 & \text{se } x^2-6<-3,\ x^2-6>3 \iff x^2<3,\ x^2>9, \\ =1 & \text{se } x^2-6=\pm 3 \qquad\qquad\quad \iff x^2=3;9, \\ >1 & \text{se } -3<x^2-6<3 \qquad\quad\ \iff 3<x^2<9. \end{cases}$$

Pertanto, per $\{x<-3\}\cup\{-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\}\cup\{x>3\}$ la serie converge, per $\{-3<x<-\sqrt{3}\}\cup\{\sqrt{3}<x<3\}$ la serie diverge, per $x=\pm\sqrt{3};\pm 3$, il criterio non dà informazioni. Sostituendo, quindi, $x=\pm\sqrt{3};\pm 3$ nella serie, otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{3^n(n^2+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

e quest'ultima serie è convergente, poiché il termine generale è asintotico a quello della serie armonica generalizzata con esponente $2>1$.

Concludendo la serie proposta converge per $\{x\le -3\}\cup\{-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}\}\cup\{x\ge 3\}$ e diverge per $\{-3<x<-\sqrt{3}\}\cup\{\sqrt{3}<x<3\}$.

Esercizio 2

Innanzitutto, calcoliamo l'integrale indefinito della funzione proposta, utilizzando la sostituzione di variable $\sin(x/2)=t$, da cui $\frac{1}{2}\cos(x/2)\,dx=dt$:

$$\begin{aligned}\int \cot^2(x/2)\,\cos(x/2)\,dx &= \int\frac{\cos^2(x/2)}{\sin^2(x/2)}\cos(x/2)\,dx = \int\frac{1-\sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2)}\cos(x/2)\,dx \\ &= 2\int\frac{1-t^2}{t^2}\,dt = 2\left(\int\frac{1}{t^2}\,dt - \int\frac{t^2}{t^2}\,dt\right) \\ &= 2\left(-\frac{1}{t}-t\right)+C = -\frac{2}{\sin(x/2)}-2\sin(x/2)+C\,.\end{aligned}$$

Imponendo la condizione richiesta si ricava

$$-5 = -\frac{2}{\sin(x/2)}-2\sin(x/2)+C\Big|_{x=\pi} = -2-2+C \qquad\Longrightarrow\qquad C=-1\,.$$

Quindi la primitiva richiesta sarà $\phi(x) = -\frac{2}{\sin(x/2)}-2\sin(x/2)-1$.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2+3\lambda+2=0$, che ha come soluzioni $\lambda=-1;-2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $y_o(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$.

Poiché $\lambda=-1$ è soluzione dell'equazione caratteristica, dal metodo di somiglianza otteniamo che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x)=Ax\mathrm{e}^{-x}$, da cui $y_p'(x)=A\mathrm{e}^{-x}-Ax\mathrm{e}^{-x}$ e $y_p''(x)=-2A\mathrm{e}^{-x}+Ax\mathrm{e}^{-x}$. Sostituendo nell'equazione completa otteniamo

$$(-2A+Ax+3A-3Ax+2Ax)\mathrm{e}^{-x} = 4\mathrm{e}^{-x} \qquad\Longrightarrow\qquad A=4\,,$$

quindi $y_p(x)=4x\mathrm{e}^{-x}$ e l'integrale generale dell'equazione proposta è $y(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+4x\mathrm{e}^{-x}$. Imponendo, ora, la condizione richiesta, otteniamo

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{\mathrm{e}^{-2x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+4x\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-2x}} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{C_1}{\mathrm{e}^{-x}}+C_2+\frac{4x}{\mathrm{e}^{-x}}\right) = C_2\,.$$

Pertanto, il limite richiesto sarà nullo se e solo se $C_2=0$, quindi le soluzioni cercate saranno della forma $y(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+4x\mathrm{e}^{-x}$ con $C_1\in\mathbb{R}$.

Esercizio 4

Poiché si tratta di una forma di indecisione $[0^0]$, utilizzando le proprietà dei logaritmi, riscriviamo il limite proposto nella forma

$$\lim_{x\to 0^+} [\sinh^2(\mathrm{e}^x - 1)]^{-\frac{1}{2\log x}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\log\left([\sinh^2(\mathrm{e}^x-1)]^{-\frac{1}{2\log x}}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\log x}\log[\sinh^2(\mathrm{e}^x-1)]}$$

e studiamo il comportamento dell'esponente. Tenendo conto che, per $y \to 0$, $\sinh y \sim y$ e $\log(\sinh^2 y) \sim 2\log y$, con $y = \mathrm{e}^x - 1$, e $\mathrm{e}^y - 1 \sim y$, con $y = x$, otteniamo

$$-\frac{1}{2\log x}\log[\sinh^2(\mathrm{e}^x - 1)] \sim -\frac{1}{2\log x}\, 2\log(\mathrm{e}^x - 1) \sim -\frac{1}{2\log x}\, 2\log x = -1\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{x\to 0^+} [\sinh^2(\mathrm{e}^x - 1)]^{-\frac{1}{2\log x}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\log x}\log[\sinh^2(\mathrm{e}^x-1)]} = \mathrm{e}^{-1} = 1/\mathrm{e}\,.$$

Esercizio 5

Tutte le affermazioni sono false, basta prendere $b_n = \sqrt{n}$ nella A) e nella B), con $a_n = b_n^2$; $b_n = n^4$ nella C), con $a_n = \sqrt{b_n}$; $b_n = \sqrt{n}$ e $a_n = n^2$ nella D).

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno non negativo (indipendentemente dal valore del parametro reale x). Inoltre, utilizzando, ad esempio, il criterio della radice otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{|2x^2-5|^n}{3^n(n-1)}} \sim \frac{|2x^2-5|}{3}\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}} \to \frac{|2x^2-5|}{3}\begin{cases} <1 & \text{se } -3<2x^2-5<3 & \iff 1<x^2<4, \\ =1 & \text{se } 2x^2-5=\pm 3 & \iff x^2=1;4, \\ >1 & \text{se } 2x^2-5<-3, 2x^2-5>3 & \iff x^2<1, x^2>4. \end{cases}$$

Pertanto, per $\{-2<x<-1\} \cup \{1<x<2\}$ la serie converge, per $\{x<-2\} \cup \{-1<x<1\} \cup \{x>2\}$ la serie diverge, per $x=\pm 1; \pm 2$, il criterio non dà informazioni. Sostituendo, quindi, $x=\pm 1; \pm 2$ nella serie, otteniamo

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{3^n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1}$$

e quest'ultima serie è divergente, poiché il termine generale è asintotico a quello della serie armonica. Concluedendo la serie proposta converge per $\{-2<x<-1\} \cup \{1<x<2\}$ e diverge per $\{x \le -2\} \cup \{-1 \le x \le 1\} \cup \{x \ge 2\}$.

Esercizio 2

Innanzitutto, calcoliamo l'integrale indefinito della funzione proposta, utilizzando la sostituzione di variable $\cos(x/2)=t$, da cui $-\frac{1}{2}\sin(x/2)\,dx = dt$:

$$\begin{aligned}\int \tan^2(x/2)\,\sin(x/2)\,dx &= \int \frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}\,\sin(x/2)\,dx = \int \frac{1-\cos^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}\,\sin(x/2)\,dx \\ &= -2\int \frac{1-t^2}{t^2}\,dt = -2\left(\int \frac{1}{t^2}\,dt - \int \frac{t^2}{t^2}\,dt\right) \\ &= -2\left(-\frac{1}{t}-t\right)+C = \frac{2}{\cos(x/2)} + 2\cos(x/2) + C\,.\end{aligned}$$

Imponendo la condizione richiesta si ricava

$$1 = \frac{2}{\cos(x/2)} + 2\cos(x/2) + C\Big|_{x=0} = 2+2+C \qquad \Longrightarrow \qquad C=-3\,.$$

Quindi la primitiva richiesta sarà $\phi(x) = \frac{2}{\cos(x/2)} + 2\cos(x/2) - 3$.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 2; 3$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $y_o(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.
Poiché $\lambda = 2$ è soluzione dell'equazione caratteristica, dal metodo di somiglianza otteniamo che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x) = Axe^{2x}$, da cui $y_p'(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$ e $y_p''(x) = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$. Sostituendo nell'equazione completa otteniamo

$$(4A + 4Ax - 5A - 10Ax + 6Ax)e^{2x} = 2e^{2x} \quad \Longrightarrow \quad -A = 2 \quad \Longrightarrow \quad A = -2\,,$$

quindi $y_p(x) = -2xe^{2x}$ e l'integrale generale dell'equazione proposta è $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - 2xe^{2x}$. Imponendo, ora, la condizione richiesta, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{e^{3x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - 2xe^{2x}}{e^{3x}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{C_1}{e^x} + C_2 - \frac{2x}{e^x}\right) = C_2\,.$$

Pertanto, il limite richiesto sarà nullo se e solo se $C_2 = 0$, quindi le soluzioni cercate saranno della forma $y(x) = C_1 e^{2x} - 2xe^{2x}$ con $C_1 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4

Poiché si tratta di una forma di indecisione $[1^\infty]$, utilizzando le proprietà dei logaritmi, riscriviamo il limite proposto nella forma

$$\lim_{x\to 1}[\cosh(\log^2 x)]^{\frac{1}{(x-1)^4}} = \lim_{x\to 1} \mathrm{e}^{\log\left([\cosh(\log^2 x)]^{\frac{1}{(x-1)^4}}\right)} = \lim_{x\to 1} \mathrm{e}^{\frac{1}{(x-1)^4}\ \log[\cosh(\log^2 x)]}$$

e studiamo il comportamento dell'esponente. Tenendo conto che, per $y \to 0$, $\log(1+y) \sim y$, con $y = \big(\cosh(\log^2 x) - 1\big)$ e $y = x-1$ e $\cosh y - 1 \sim y^2/2$, con $y = \log^2 x$, otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)^4}\ \log[\cosh(\log^2 x)] &= \frac{1}{(x-1)^4}\ \log[1+\big(\cosh(\log^2 x)-1\big)] \sim \frac{\cosh(\log^2 x)-1}{(x-1)^4}\\ &\sim \frac{\log^4 x}{2(x-1)^4} = \frac{\log^4[1+(x-1)]}{2(x-1)^4} \sim \frac{(x-1)^4}{2(x-1)^4} = 1/2\,.\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\lim_{x\to 1}[\cosh(\log^2 x)]^{\frac{1}{(x-1)^4}} = \lim_{x\to 1} \mathrm{e}^{\frac{1}{(x-1)^4}\ \log[\cosh(\log^2 x)]} = \mathrm{e}^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}\,.$$

Esercizio 5

Tutte le affermazioni sono false, basta prendere $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ nella $A)$ e nella $B)$, con $b_n = a_n^2$; $a_n = \frac{1}{n^4}$ nella $C)$, con $b_n = \sqrt{a_n}$; $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$ nella $D)$.