SOLUZIONI COMPITO del 3/07/2014
ANALISI MATEMATICA I - 10 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno non negativo (indipendentemente dal valore del parametro reale x). Inoltre, utilizzando, ad esempio, il criterio della radice otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{|x^2-3|^n}{2^n(n+1)}} \sim \frac{|x^2-3|}{2}\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \to \frac{|x^2-3|}{2}\begin{cases} <1 & \text{se } -2<x^2-3<2 \iff 1<x^2<5, \\ =1 & \text{se } x^2-3=\pm 2 \iff x^2=1;5, \\ >1 & \text{se } x^2-3<-2,\ x^2-3>2 \iff x^2<1,\ x^2>5. \end{cases}$$

Pertanto, per $\{-\sqrt{5}<x<-1\}\cup\{1<x<\sqrt{5}\}$ la serie converge, per $\{x<-\sqrt{5}\}\cup\{-1<x<1\}\cup\{x>\sqrt{5}\}$ la serie diverge, per $x=\pm 1;\pm\sqrt{5}$, il criterio non dà informazioni. Sostituendo, quindi, $x=\pm 1;\pm\sqrt{5}$ nella serie, otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{2^n(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$$

e quest'ultima serie è divergente, poiché il termine generale è asintotico a quello della serie armonica. Concludendo la serie proposta converge per $\{-\sqrt{5}<x<-1\}\cup\{1<x<\sqrt{5}\}$ e diverge per $\{x\leq -\sqrt{5}\}\cup\{-1\leq x\leq 1\}\cup\{x\geq\sqrt{5}\}$.

Esercizio 2

Utilizzando il metodo di riduzione degli integrali doppi, l'integrale proposto si può riscrivere come segue

$$\begin{aligned}\iint_D (4x+2)\mathrm{e}^{y+x}\,dx\,dy &= 2\int_0^1(2x+1)\left(\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{y+x}\,dy\right)dx = 2\int_0^1(2x+1)\left(\mathrm{e}^{y+x}\Big|_0^{x^2}\right)dx \\ &= 2\int_0^1(2x+1)\left(\mathrm{e}^{x^2+x}-\mathrm{e}^x\right)dx = 2\left(\mathrm{e}^{x^2+x}\Big|_0^1-\int_0^1(2x+1)\mathrm{e}^x dx\right) \\ &= 2\left(\mathrm{e}^2-1-(2x+1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1+2\mathrm{e}^x\Big|_0^1\right)=2\left(\mathrm{e}^2-1-3\mathrm{e}+1+2\mathrm{e}-2\right)=2(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-2)\,.\end{aligned}$$

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2-3\lambda+2=0$, che ha come soluzioni $\lambda=1;2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $y_o(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$.
Poiché $\lambda=1$ è soluzione dell'equazione caratteristica, dal metodo di somiglianza otteniamo che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x)=Ax\mathrm{e}^x$, da cui $y_p'(x)=A\mathrm{e}^x+Ax\mathrm{e}^x$ e $y_p''(x)=2A\mathrm{e}^x+Ax\mathrm{e}^x$. Sostituendo nell'equazione completa otteniamo

$$(2A+Ax-3A-3Ax+2Ax)\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x \quad\Longrightarrow\quad -A=2 \quad\Longrightarrow\quad A=-2\,,$$

quindi $y_p(x)=-2x\mathrm{e}^x$ e l'integrale generale dell'equazione proposta è $y(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-2x\mathrm{e}^x$. Inserendo, ora, le condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 0=y(0)=C_1+C_2\,, \\ -2=y'(0)=C_1+2C_2-2\,, \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} C_1+C_2=0\,, \\ C_1+2C_2=0\,, \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad C_1=C_2=0\,.$$

Pertanto, la soluzione cercata sarà $y(x)=-2x\mathrm{e}^x$.

Esercizio 4

Tenendo conto delle gerarchie degli infiniti e del fatto che $\sin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$, per $\varepsilon_n \to 0$, otteniamo

$$\frac{n\mathrm{e}^n - 2^n}{\log n + \sin n} \sin\left(\frac{1}{\mathrm{e}^n + \log n}\right) \sim \frac{n\mathrm{e}^n}{\log n} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^n} = \frac{n}{\log n} \to +\infty\,.$$

Esercizio 5

Tutte le affermazioni sono false, basta prendere $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ nella A) e nella D); $a_n = \frac{1}{n^4}$ nella B); $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$ nella C).