ANALISI I (h. 2.30) Appello del **4 Febbraio 2014**	**TEMA A** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

1. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2|x-1|} & \text{se } x > 0, \\ \sqrt{2} & \text{se } x = 0, \\ \dfrac{\log[1+\sin^2(\sqrt{2}\,x)]}{\sqrt{x^4 - 3x^7}} & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

determinare e classificare i suoi punti di discontinuità e i suoi punti di non derivablità.

---

2. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[n^{\frac{1}{n+2}} - \cosh\sqrt{\frac{2\log n}{n+2}} \right] \sqrt{n}\,.$$

---

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - \dfrac{3x+1}{1+\tan^2[y(x)]} = 0\,, \\ y(1) = \pi/4 \end{cases}$$

---

4. Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{(1+5x^2+x^4)^{3/4} - 1}{\sin[(x+x^2/7)^{2\alpha}]}\,dx$$

esiste finito.

---

5. Sia $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ una funzione tale che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette, giustificando la risposta, e fornire un controesempio per quelle false:

(A) se $f(x) \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$, allora $\int_1^{+\infty} f(x^2)\,dx$ converge;
(B) se $f(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ per $x \to +\infty$, allora $\int_1^{+\infty} f(x^2)\,dx$ converge;
(C) se $f(x) \sim x$ per $x \to 0$, allora $\int_1^{+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$ diverge;
(D) se $f(x) \sim (x^3)$ per $x \to 0$, allora $\int_1^{+\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx$ diverge;

ANALISI I (h. 2.30) Appello del **4 Febbraio 2014**	**TEMA B** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

1. Data la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\begin{cases}\sin|x-\pi/2| & \text{se } x>0,\\ 3 & \text{se } x=0,\\ \dfrac{\sin\left[\log(1+x^2)\right]}{\sqrt{x^4-x^5}} & \text{se } x<0;\end{cases}$$

determinare e classificare i suoi punti di discontinuità e i suoi punti di non derivablità.

---

2. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\cos\sqrt{\frac{2\log(n+4)}{n+4}}-(n+4)^{-\frac{1}{n+4}}\right]n\,.$$

---

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases}y'(x)+\dfrac{3x^2+2x}{\sqrt{3}}\cos^2[y(x)]=0\,,\\ y(1)=-\pi/3\end{cases}$$

---

4. Stabilire per quali valori di $\alpha>0$ l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log\left[1+\left(\frac{1}{x^7+x^9}\right)^{\alpha}\right]}{\left(1+\frac{2}{2x^2+3x^4}\right)^{2/3}-1}\,dx$$

esiste finito.

---

5. Sia $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ una funzione tale che $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette, giustificando la risposta, e fornire un controesempio per quelle false:

(A) se $f(x)\sim\sqrt{x}$ per $x\to0$, allora $\int_1^{+\infty}f\left(\frac{1}{x^2}\right)\,dx$ converge;
(B) se $f(x)=o\left(x^2\right)$ per $x\to0$, allora $\int_1^{+\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$ converge;
(C) se $f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x\to+\infty$, allora $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ diverge
(D) se $f(x)\sim\frac{1}{x^2}$ per $x\to+\infty$, allora $\int_1^{+\infty}f(\sqrt{x})\,dx$ diverge

ANALISI I (h. 2.30) Appello del **4 Febbraio 2014**	**TEMA C** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

1. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left[e^{\pi x^2/4} - 1\right]}{\sqrt[3]{x^6 + x^8}} & \text{se } x > 0, \\ \sqrt{3} & \text{se } x = 0, \\ \left|\arctan\left(\dfrac{x+2}{2}\right)\right| & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

determinare e classificare i suoi punti di discontinuità e i suoi punti di non derivablità.

---

2. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+2)^{-\frac{1}{n+2}} - \cos\sqrt{\frac{2\log(n+2)}{n+2}} \right] n \,.$$

---

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{\sqrt{3}x^2 + 2x}{\sqrt{3}} \cos^2[y(x)] = 0\,, \\ y(1) = -\pi/6 \end{cases}$$

---

4. Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\left[\log\left(1 + \frac{1}{x^3 + 3x^5}\right)\right]^{\alpha}}{\left(1 + \frac{4}{2x + 3x^3}\right)^{6/5} - 1}\, dx$$

esiste finito.

---

5. Sia $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ una funzione tale che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette, giustificando la risposta, e fornire un controesempio per quelle false:

(A) se $f(x) \sim \sqrt{x}$ per $x \to 0$, allora $\int_1^{+\infty} f\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ converge;

(B) se $f(x) = o\left(x^2\right)$ per $x \to 0$, allora $\int_1^{+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) dx$ converge;

(C) se $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \to +\infty$, allora $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge

(D) se $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$, allora $\int_1^{+\infty} f(\sqrt{x})\, dx$ diverge

ANALISI I (h. 2.30) Appello del **4 Febbraio 2014**	**TEMA D** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

1. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\sqrt{2}\sin x} - 1}{\sqrt[3]{x^3 + x^4}} & \text{se } x > 0, \\ 2 & \text{se } x = 0, \\ \sqrt[3]{8|x+1|} & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

determinare e classificare i suoi punti di discontinuità e i suoi punti di non derivablità.

---

2. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cosh \sqrt{\frac{2\log(n+3)}{n}} - (n+3)^{\frac{1}{n}} \right] \sqrt{n}\,.$$

---

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - \dfrac{2\sqrt{3}x + 2}{1 + \tan^2[y(x)]} = 0\,, \\ y(1) = \pi/3 \end{cases}$$

---

4. Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{(1 + x^3 + 3x^5)^{7/5} - 1}{[\sin(x + x^3/5)]^{5\alpha/4}}\, dx$$

esiste finito.

---

5. Sia $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ una funzione tale che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette, giustificando la risposta, e fornire un controesempio per quelle false:

(A) se $f(x) \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$, allora $\int_1^{+\infty} f(x^2)\, dx$ converge;

(B) se $f(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ per $x \to +\infty$, allora $\int_1^{+\infty} f(x^2)\, dx$ converge;

(C) se $f(x) \sim x$ per $x \to 0$, allora $\int_1^{+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)\, dx$ diverge;

(D) se $f(x) \sim (x^3)$ per $x \to 0$, allora $\int_1^{+\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\, dx$ diverge;