SOLUZIONI COMPITO del 08/01/2014
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1
Ponendo $z = x + iy = re^{i\theta}$, otteniamo $3z - 2i = 3x + i(3y - 2)$, da cui si ricava

$$3x + x^2 - y^2 + 2ixy = \theta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2xy = 0\,, \\ 3x + x^2 - y^2 = \theta\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0\,, \\ -y^2 = -\dfrac{\pi}{2}\,,\ y < 0\,, \end{cases} \qquad \qquad \begin{cases} x = 0\,, \\ y = -\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0\,, \\ x^2 + 3x = 0\,,\ x > 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y = 0\,, \\ \text{impossibile}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0\,, \\ x^2 + 3x = -\pi\,,\ x < 0\,, \end{cases} \qquad \qquad \begin{cases} y = 0\,, \\ \text{impossibile}\,, \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che, se $x = 0$, necessariamente $\theta = \pm\pi/2$, mentre se $y = 0$, necessariamente $\theta = 0, -\pi$. Inoltre, abbiamo osservato che l'equazione $x^2 + 3x + \pi = 0$ non ha soluzioni, in quanto ha il discriminante negativo e $x = y = 0$ non è ammissibile. Pertanto, la soluzione cercata sarà $z = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Esercizio 2
Ricordiamo che

$$\log\left(1 + \sin\frac{1}{n^2}\right) \sim \sin\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{n^2}\right)^2 \sim \frac{1}{n^2} - \frac{1}{6n^6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{6n^6}\right)^2 \sim \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4}\,.$$

Quindi, posto

$$a_n := \frac{\left[\log\left(1 + \sin\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n^{\alpha^2}}\right]}{2n^3 - 3\log(1+n)}\, n^\alpha\,,$$

si ottiene che, per $\alpha \neq \pm\sqrt{2}$,

$$a_n \sim \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^{\alpha^2}}\right)\frac{n^\alpha}{2n^3} \sim \begin{cases} \dfrac{1}{2n^{5-\alpha}} & \text{se } \alpha < -\sqrt{2} \text{ e } \alpha > \sqrt{2}, \\ -\dfrac{1}{2n^{\alpha^2-\alpha+3}} & \text{se } -\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}. \end{cases}$$

In particolare, tenendo conto che $\alpha^2 - \alpha + 3 > 0$, poiché ha il discriminante negativo, si ha

$$a_n \to \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 5, \\ 1/2 & \text{se } \alpha = 5, \\ 0 & \text{se } \alpha < -\sqrt{2} \text{ e } \sqrt{2} < \alpha < 5, \\ 0 & \text{se } -\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Inoltre, per $\alpha = \pm\sqrt{2}$, si ha

$$a_n \sim -\frac{1}{2n^4}\,\frac{n^\alpha}{2n^3} = -\frac{1}{4n^{7\pm\sqrt{2}}} \to 0\,.$$

Quindi, si ricava

$$a_n \to \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 5, \\ 1/2 & \text{se } \alpha = 5, \\ 0 & \text{se } \alpha < 5. \end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 1 \pm \sqrt{6}$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{(1+\sqrt{6})x} + C_2 \mathrm{e}^{(1-\sqrt{6})x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $y_p(x) = A\mathrm{e}^{kx}$, da cui $y_p'(x) = kA\mathrm{e}^{kx}$ e $y_p''(x) = k^2 A\mathrm{e}^{kx}$. Pertanto, inserendo nell'equazione, si ricava

$$k^2 A\mathrm{e}^{kx} - 2kA\mathrm{e}^{kx} - 5A\mathrm{e}^{kx} = \mathrm{e}^{kx}$$
$$\implies \quad A(k^2 - 2k - 5) = 1 \quad \implies \quad A = \frac{1}{k^2 - 2k - 5}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $k^2 - 2k - 5 \neq 0$, poiché si annulla in valori non appartenenti ad $\mathbb{N}$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà

$$y_k(x) = C_1 \mathrm{e}^{(1+\sqrt{6})x} + C_2 \mathrm{e}^{(1-\sqrt{6})x} + \frac{1}{k^2 - 2k - 5}\,\mathrm{e}^{kx} \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Consideriamo ora

$$\begin{aligned} y_k(x)\mathrm{e}^{(1-\sqrt{6})x} &= \left[C_1 \mathrm{e}^{(1+\sqrt{6})x} + C_2 \mathrm{e}^{(1-\sqrt{6})x} + \frac{1}{k^2 - 2k - 5}\,\mathrm{e}^{kx}\right] \mathrm{e}^{(1-\sqrt{6})x} \\ &= C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{(2-2\sqrt{6})x} + \frac{1}{k^2 - 2k - 5}\,\mathrm{e}^{(k+1-\sqrt{6})x}\,; \end{aligned}$$

poiché

$$\lim_{x\to+\infty} C_2 \mathrm{e}^{(2-2\sqrt{6})x} = 0 \qquad \forall C_2 \in \mathbb{R}\,, \text{ mentre } \lim_{x\to+\infty} C_1 \mathrm{e}^{2x} = \pm\infty \qquad \forall C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,$$

affinché la soluzione sia limitata per $x \to +\infty$, si deve avere $C_1 = 0$ e $k + 1 - \sqrt{6} < 0$ ovvero, tenendo conto che $k \geq 1$, l'unico valore ammissibile è $k = 1$. Quindi, al variare di $C_2 \in \mathbb{R}$ si hanno infinite soluzioni soddisfacenti alla condizione richiesta, date da

$$y(x) = C_2 \mathrm{e}^{(1-\sqrt{6})x} - \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{x}\,, \quad C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 4

Osserviamo che per $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) \sim \left[\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{6x^3(x+1)^3} - \frac{1}{x^2}\right] x^2 = \left[\frac{x - x - 1}{x^2(x+1)} - \frac{1}{6x^3(x+1)^3}\right] x^2 \sim -\frac{1}{x}\,;$$

pertanto, l'integrale proposto non converge.

Esercizio 5

Osserviamo che

$$\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^n \to 1 \iff \mathrm{e}^{n \log\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)} \to 1 \iff n \log\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right) \to 0 \iff n \log\left(1 + \frac{a_n - b_n}{1+b_n}\right) \to 0\,;$$

pertanto, poiché $\frac{a_n - b_n}{1+b_n} \to 0$ e $\log\left(1 + \frac{a_n - b_n}{1+b_n}\right) \sim \frac{a_n - b_n}{1+b_n}$, si deve necessariamente avere

$$n\frac{a_n - b_n}{1+b_n} \to 0 \quad \text{che equivale a} \quad \frac{\frac{a_n - b_n}{1+b_n}}{\frac{1}{n}} \to 0\,.$$

Quindi, per definizione, da quest'ultima condizione si ricava $\frac{a_n - b_n}{1+b_n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

TEMA B

Esercizio 1

Ponendo $z = x + iy = re^{i\theta}$, otteniamo $2 - 4z = 2 - 4x - 4iy$, da cui si ricava

$$-4iy + i(x^2 - y^2) - 2xy = i\theta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -2xy = 0\,, \\ -4y + x^2 - y^2 = \theta\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0\,, \\ -4y - y^2 = \dfrac{\pi}{2}\,,\ y > 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0\,, \\ \text{impossibile}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0\,, \\ -4y - y^2 = -\dfrac{\pi}{2}\,,\ y < 0\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0\,, \\ y = -2 - \sqrt{4 + \dfrac{\pi}{2}}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0\,, \\ x^2 = 0\,,\ x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0\,, \\ \text{impossibile}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0\,, \\ x^2 = -\pi\,,\ x < 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0\,, \\ \text{impossibile}\,, \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che, se $x = 0$, necessariamente $\theta = \pm\pi/2$, mentre se $y = 0$, necessariamente $\theta = 0, -\pi$. Inoltre, abbiamo osservato che la soluzione identicamente nulla non è accettabile, l'equazione $x^2 = -\pi$ non ha soluzioni e $y = -2 \pm \sqrt{4 - \frac{\pi}{2}} < 0$. Pertanto, la soluzione cercata sarà $z = (-2 - \sqrt{4 + \frac{\pi}{2}})i$.

Esercizio 2

Ricordiamo che

$$\sinh\left[\log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)\right] \sim \log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) + \frac{1}{6}\left[\log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)\right]^3 \sim \frac{1}{n^3} - \frac{1}{2n^6} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{2n^6}\right)^3 \sim \frac{1}{n^3} - \frac{1}{2n^6}\,.$$

Quindi, posto

$$a_n := \frac{\left[2n - \log(1 + n^4)\right]}{n^{-2\alpha^2} - \sinh\left[\log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)\right]}\, n^{-\alpha}\,,$$

si ottiene che, per $\alpha \neq \pm\sqrt{3/2}$,

$$a_n \sim \frac{2n\, n^{-\alpha}}{\left(\frac{1}{n^{2\alpha^2}} - \frac{1}{n^3}\right)} \sim \begin{cases} -\dfrac{2}{n^{\alpha - 4}} & \text{se } \alpha < -\sqrt{3/2} \text{ e } \alpha > \sqrt{3/2}, \\ \dfrac{2}{n^{-2\alpha^2 + \alpha - 1}} & \text{se } -\sqrt{3/2} < \alpha < \sqrt{3/2}. \end{cases}$$

In particolare, tenendo conto che $-2\alpha^2 + \alpha - 1 < 0$, poiché ha il discriminante negativo, si ha

$$a_n \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 4, \\ -2 & \text{se } \alpha = 4, \\ -\infty & \text{se } \alpha < -\sqrt{3/2} \text{ e } \sqrt{3/2} < \alpha < 4, \\ +\infty & \text{se } -\sqrt{3/2} < \alpha < \sqrt{3/2}. \end{cases}$$

Inoltre, per $\alpha = \pm\sqrt{3/2}$, si ha

$$a_n \sim \frac{2n^{1-\alpha}}{\frac{1}{2n^6}} = 4n^{7 \pm \sqrt{3/2}} \to +\infty\,.$$

Quindi, si ricava

$$a_n \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 4, \\ -2 & \text{se } \alpha = 4, \\ -\infty & \text{se } \alpha < -\sqrt{3/2} \text{ e } \sqrt{3/2} < \alpha < 4, \\ +\infty & \text{se } -\sqrt{3/2} \leq \alpha \leq \sqrt{3/2}. \end{cases}$$

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2+4\lambda-6=0$, che ha come soluzioni $\lambda=-2\pm\sqrt{10}$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x)=C_1\mathrm{e}^{(-2+\sqrt{10})x}+C_2\mathrm{e}^{(-2-\sqrt{10})x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che, per ogni $k\in\mathbb{N}$, $y_p(x)=A\mathrm{e}^{-kx}$, da cui $y_p'(x)=-kA\mathrm{e}^{-kx}$ e $y_p''(x)=k^2A\mathrm{e}^{-kx}$. Pertanto, inserendo nell'equazione, si ricava

$$\begin{aligned} k^2A\mathrm{e}^{-kx}-4kA\mathrm{e}^{-kx}-6A\mathrm{e}^{-kx}&=\mathrm{e}^{-kx}\\ \Longrightarrow\quad A(k^2-4k-6)=1\quad&\Longrightarrow\quad A=\frac{1}{k^2-4k-6}\,, \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $k^2-4k-6\neq 0$, poiché si annulla in valori non appartenenti ad $\mathbb{N}$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà

$$y_k(x)=C_1\mathrm{e}^{(-2+\sqrt{10})x}+C_2\mathrm{e}^{(-2-\sqrt{10})x}+\frac{1}{k^2-4k-6}\,\mathrm{e}^{-kx}\qquad\forall k\in\mathbb{N}\,.$$

Consideriamo ora

$$\begin{aligned} y_k(x)\mathrm{e}^{(-2+\sqrt{10})x}&=\left[C_1\mathrm{e}^{(-2+\sqrt{10})x}+C_2\mathrm{e}^{(-2-\sqrt{10})x}+\frac{1}{k^2-4k-6}\,\mathrm{e}^{-kx}\right]\mathrm{e}^{(-2+\sqrt{10})x}\\ &=C_1\mathrm{e}^{(-4+2\sqrt{10})x}+C_2\mathrm{e}^{-4x}+\frac{1}{k^2-4k-6}\,\mathrm{e}^{(-k-2+\sqrt{10})x}\,; \end{aligned}$$

poiché

$$\lim_{x\to-\infty}C_1\mathrm{e}^{(-4+2\sqrt{10})x}=0\qquad\forall C_1\in\mathbb{R}\,,\ \text{mentre}\ \lim_{x\to-\infty}C_2\mathrm{e}^{-4x}=\pm\infty\qquad\forall C_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\,,$$

affinché la soluzione sia limitata per $x\to-\infty$, si deve avere $C_2=0$ e $-k-2+\sqrt{10}>0$ ovvero, tenendo conto che $k\geq 1$, l'unico valore ammissibile è $k=1$. Quindi, al variare di $C_1\in\mathbb{R}$ si hanno infinite soluzioni soddisfacenti alla condizione richiesta, date da

$$y(x)=C_1\mathrm{e}^{(-2+\sqrt{10})x}-\frac{1}{9}\,\mathrm{e}^{-x}\,,\quad C_1\in\mathbb{R}\,.$$

Esercizio 4
Osserviamo che per $x\to 0^+$, si ha

$$f(x)\sim\frac{x(x+1)+\frac{1}{3}x^3(x+1)^3-x}{x^{7/2}}=\frac{x^2+\frac{1}{3}(x^3+3x^4+3x^5+x^6)}{x^{7/2}}\sim\frac{1}{x^{3/2}}\,;$$

pertanto, l'integrale proposto non converge.

Esercizio 5
Osserviamo che

$$\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right)^{n^2}\to 1\iff \mathrm{e}^{n^2\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right)}\to 1\iff n^2\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right)\to 0\,;$$

pertanto, poiché $\frac{a_n}{b_n}$ è una successione regolare si deve necessariamente avere $\frac{a_n}{b_n}\to 0$ e, quindi, tenendo conto che in tal caso $\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right)\sim\frac{a_n}{b_n}$, si ricava che deve necessariamente valere

$$n^2\frac{a_n}{b_n}\to 0\quad\text{che equivale a}\quad\frac{\frac{a_n}{b_n}}{\frac{1}{n^2}}\to 0\,.$$

Quindi, per definizione, da quest'ultima condizione si ottiene $\frac{a_n}{b_n}=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

TEMA C

Esercizio 1

Ponendo $z = x + iy = re^{i\theta}$, otteniamo $5z - 1 = 5x - 1 + 5iy$, da cui si ricava

$$5iy - i(x^2 - y^2) + 2xy = i\theta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2xy = 0\,, \\ 5y - x^2 + y^2 = \theta\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0\,, \\ 5y + y^2 = \dfrac{\pi}{2}\,,\ y > 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0\,, \\ y = \dfrac{-5 + \sqrt{25 + 2\pi}}{2}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0\,, \\ 5y + y^2 = -\dfrac{\pi}{2}\,,\ y < 0\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0\,, \\ y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 2\pi}}{2}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0\,, \\ -x^2 = 0\,,\ x > 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0\,, \\ \text{impossibile}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0\,, \\ -x^2 = \pi\,,\ x < 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0\,, \\ \text{impossibile}\,, \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che, se $x = 0$, necessariamente $\theta = \pm\pi/2$, mentre se $y = 0$, necessariamente $\theta = 0, \pi$. Inoltre, abbiamo osservato che la soluzione identicamente nulla non è accettabile e l'equazione $-x^2 = \pi$ non ha soluzioni. Pertanto, le soluzioni cercate saranno $z = \frac{-5\pm\sqrt{25-2\pi}}{2}\, i$ e $z = \frac{-5+\sqrt{25+2\pi}}{2}\, i$.

Esercizio 2

Ricordiamo che

$$\log\left[1 + \sinh\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \sim \sinh\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{2}\left[\sinh\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]^2 \sim \frac{1}{n^3} + \frac{1}{6n^9} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{6n^9}\right)^2 \sim \frac{1}{n^3} - \frac{1}{2n^6}\,.$$

Quindi, posto

$$a_n := \frac{\left[5n^2 - 2\log(1 + n^3)\right]}{n^{-2\alpha^2} - \log\left(1 + \sinh\frac{1}{n^3}\right)} n^{-\alpha}\,,$$

si ottiene che, per $\alpha \neq \pm\sqrt{3/2}$,

$$a_n \sim \frac{5n^2\, n^{-\alpha}}{\left(\frac{1}{n^{2\alpha^2}} - \frac{1}{n^3}\right)} \sim \begin{cases} -\dfrac{5}{n^{\alpha-5}} & \text{se } \alpha < -\sqrt{3/2} \text{ e } \alpha > \sqrt{3/2}, \\ \dfrac{5}{n^{-2\alpha^2+\alpha-2}} & \text{se } -\sqrt{3/2} < \alpha < \sqrt{3/2}. \end{cases}$$

In particolare, tenendo conto che $-2\alpha^2 + \alpha - 2 < 0$, poiché ha il discriminante negativo, si ha

$$a_n \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 5, \\ -5 & \text{se } \alpha = 5, \\ -\infty & \text{se } \alpha < -\sqrt{3/2} \text{ e } \sqrt{3/2} < \alpha < 5, \\ +\infty & \text{se } -\sqrt{3/2} < \alpha < \sqrt{3/2}. \end{cases}$$

Inoltre, per $\alpha = \pm\sqrt{3/2}$, si ha

$$a_n \sim \frac{5n^{2-\alpha}}{\frac{1}{2n^6}} = 10n^{8\pm\sqrt{3/2}} \to +\infty\,.$$

Quindi, si ricava

$$a_n \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 5, \\ -2 & \text{se } \alpha = 5, \\ -\infty & \text{se } \alpha < -\sqrt{3/2} \text{ e } \sqrt{3/2} < \alpha < 5, \\ +\infty & \text{se } -\sqrt{3/2} \le \alpha \le \sqrt{3/2}. \end{cases}$$

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2+4\lambda-8=0$, che ha come soluzioni $\lambda=-2\pm\sqrt{12}$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x)=C_1\mathrm{e}^{(-2+\sqrt{12})x}+C_2\mathrm{e}^{(-2-\sqrt{12})x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che, per ogni $k\in\mathbb{N}$, $y_p(x)=A\mathrm{e}^{-kx}$, da cui $y_p'(x)=-kA\mathrm{e}^{-kx}$ e $y_p''(x)=k^2A\mathrm{e}^{-kx}$. Pertanto, inserendo nell'equazione, si ricava

$$\begin{aligned}&k^2A\mathrm{e}^{-kx}-4kA\mathrm{e}^{-kx}-8A\mathrm{e}^{-kx}=\mathrm{e}^{-kx}\\ \implies\quad &A(k^2-4k-8)=1\quad\implies\quad A=\frac{1}{k^2-4k-8}\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $k^2-4k-8\neq 0$, poiché si annulla in valori non appartenenti ad $\mathbb{N}$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà

$$y_k(x)=C_1\mathrm{e}^{(-2+\sqrt{12})x}+C_2\mathrm{e}^{(-2-\sqrt{12})x}+\frac{1}{k^2-4k-8}\,\mathrm{e}^{-kx}\qquad\forall k\in\mathbb{N}\,.$$

Consideriamo ora

$$\begin{aligned}y_k(x)\mathrm{e}^{(-2+\sqrt{12})x}&=\left[C_1\mathrm{e}^{(-2+\sqrt{12})x}+C_2\mathrm{e}^{(-2-\sqrt{12})x}+\frac{1}{k^2-4k-8}\,\mathrm{e}^{-kx}\right]\mathrm{e}^{(-2+\sqrt{12})x}\\&=C_1\mathrm{e}^{(-4+2\sqrt{12})x}+C_2\mathrm{e}^{-4x}+\frac{1}{k^2-4k-8}\,\mathrm{e}^{(-k-2+\sqrt{12})x}\,;\end{aligned}$$

poiché

$$\lim_{x\to-\infty}C_1\mathrm{e}^{(-4+2\sqrt{12})x}=0\qquad\forall C_1\in\mathbb{R}\,,\ \text{mentre}\ \lim_{x\to-\infty}C_2\mathrm{e}^{-4x}=\pm\infty\qquad\forall C_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\,,$$

affinché la soluzione sia limitata per $x\to-\infty$, si deve avere $C_2=0$ e $-k-2+\sqrt{12}>0$ ovvero, tenendo conto che $k\geq 1$, l'unico valore ammissibile è $k=1$. Quindi, al variare di $C_1\in\mathbb{R}$ si hanno infinite soluzioni soddisfacenti alla condizione richiesta, date da

$$y(x)=C_1\mathrm{e}^{(-2+\sqrt{12})x}-\frac{1}{11}\,\mathrm{e}^{-x}\,,\quad C_1\in\mathbb{R}\,.$$

Esercizio 4
Osserviamo che per $x\to 0^+$, si ha

$$f(x)\sim\frac{3x^2-3x^2(x+1)-\frac{1}{3}[3x^2(x+1)]^3}{x^{13/2}}=\frac{-3x^3-9(x^6+3x^7+3x^8+x^9)}{x^{13/2}}\sim-\frac{3}{x^{7/2}}\,;$$

pertanto, l'integrale proposto non converge.

Esercizio 5
Osserviamo che

$$\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right)^{n^2}\to 1\iff \mathrm{e}^{n^2\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right)}\to 1\iff n^2\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right)\to 0\,;$$

pertanto, poiché $\frac{a_n}{b_n}$ è una successione regolare si deve necessariamente avere $\frac{a_n}{b_n}\to 0$ e, quindi, tenendo conto che in tal caso $\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right)\sim\frac{a_n}{b_n}$, si ricava che deve necessariamente valere

$$n^2\frac{a_n}{b_n}\to 0\quad\text{che equivale a}\quad\frac{\frac{a_n}{b_n}}{\frac{1}{n^2}}\to 0\,.$$

Quindi, per definizione, da quest'ultima condizione si ottiene $\frac{a_n}{b_n}=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

TEMA D

Esercizio 1

Ponendo $z = x + iy = re^{i\theta}$, otteniamo $4i - 2z = i(4-2y) - 2x$, da cui si ricava

$$-2x - x^2 + y^2 - 2ixy = \theta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -2xy = 0\,, \\ -2x - x^2 + y^2 = \theta\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0\,, \\ y^2 = \dfrac{\pi}{2}\,,\ y > 0\,, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x = 0\,, \\ y = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0\,, \\ -x^2 - 2x = 0\,,\ x > 0\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y = 0\,, \\ \text{impossibile}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0\,, \\ -x^2 - 2x = \pi\,,\ x < 0\,, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y = 0\,, \\ \text{impossibile}\,, \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che, se $x = 0$, necessariamente $\theta = \pm\pi/2$, mentre se $y = 0$, necessariamente $\theta = 0, \pi$. Inoltre, abbiamo osservato che l'equazione $x^2 + 2x + \pi = 0$ non ha soluzioni, in quanto ha il discriminante negativo e $x = y = 0$ non è ammissibile. Pertanto, la soluzione cercata sarà $z = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Esercizio 2

Ricordiamo che

$$\sin\left[\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right] \sim \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{6}\left[\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]^3 \sim \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4}\right)^3 \sim \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4}\,.$$

Quindi, posto

$$a_n := \frac{\left[\sin\left[\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right] - \frac{1}{n^{\alpha^2}}\right]}{3n^4 - \log(1+n^2)}\, n^{2\alpha},,$$

si ottiene che, per $\alpha \neq \pm\sqrt{2}$,

$$a_n \sim \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^{\alpha^2}}\right)\frac{n^{2\alpha}}{3n^4} \sim \begin{cases} \dfrac{1}{3n^{6-2\alpha}} & \text{se } \alpha < -\sqrt{2} \text{ e } \alpha > \sqrt{2}, \\ -\dfrac{1}{3n^{\alpha^2-2\alpha+4}} & \text{se } -\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}. \end{cases}$$

In particolare, tenendo conto che $\alpha^2 - 2\alpha + 4 > 0$, poiché ha il discriminante negativo, si ha

$$a_n \to \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 3, \\ 1/3 & \text{se } \alpha = 3, \\ 0 & \text{se } \alpha < -\sqrt{2} \text{ e } \sqrt{2} < \alpha < 3, \\ 0 & \text{se } -\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Inoltre, per $\alpha = \pm\sqrt{2}$, si ha

$$a_n \sim -\frac{1}{2n^4}\,\frac{n^{2\alpha}}{3n^4} = -\frac{1}{6n^{8\pm2\sqrt{2}}} \to 0\,.$$

Quindi, si ricava

$$a_n \to \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 3, \\ 1/3 & \text{se } \alpha = 3, \\ 0 & \text{se } \alpha < 3. \end{cases}$$

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2\lambda - 7 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 1 \pm \sqrt{8}$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{(1+\sqrt{8})x} + C_2 \mathrm{e}^{(1-\sqrt{8})x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $y_p(x) = A\mathrm{e}^{kx}$, da cui $y_p'(x) = kA\mathrm{e}^{kx}$ e $y_p''(x) = k^2 A\mathrm{e}^{kx}$. Pertanto, inserendo nell'equazione, si ricava

$$k^2 A\mathrm{e}^{kx} - 2kA\mathrm{e}^{kx} - 7A\mathrm{e}^{kx} = \mathrm{e}^{kx}$$

$$\implies \quad A(k^2 - 2k - 7) = 1 \quad \implies \quad A = \frac{1}{k^2 - 2k - 7}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $k^2 - 2k - 7 \neq 0$, poiché si annulla in valori non appartenenti ad $\mathbb{N}$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà

$$y_k(x) = C_1 \mathrm{e}^{(1+\sqrt{8})x} + C_2 \mathrm{e}^{(1-\sqrt{8})x} + \frac{1}{k^2 - 2k - 7}\,\mathrm{e}^{kx} \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Consideriamo ora

$$\begin{aligned} y_k(x)\mathrm{e}^{(1-\sqrt{8})x} &= \left[C_1 \mathrm{e}^{(1+\sqrt{8})x} + C_2 \mathrm{e}^{(1-\sqrt{8})x} + \frac{1}{k^2 - 2k - 7}\,\mathrm{e}^{kx}\right] \mathrm{e}^{(1-\sqrt{8})x} \\ &= C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{(2-2\sqrt{8})x} + \frac{1}{k^2 - 2k - 7}\,\mathrm{e}^{(k+1-\sqrt{8})x}\,; \end{aligned}$$

poiché

$$\lim_{x\to+\infty} C_2 \mathrm{e}^{(2-2\sqrt{8})x} = 0 \qquad \forall C_2 \in \mathbb{R}\,, \text{ mentre } \lim_{x\to+\infty} C_1 \mathrm{e}^{2x} = \pm\infty \qquad \forall C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,$$

affinché la soluzione sia limitata per $x \to +\infty$, si deve avere $C_1 = 0$ e $k + 1 - \sqrt{8} < 0$ ovvero, tenendo conto che $k \geq 1$, l'unico valore ammissibile è $k = 1$. Quindi, al variare di $C_2 \in \mathbb{R}$ si hanno infinite soluzioni soddisfacenti alla condizione richiesta, date da

$$y(x) = C_2 \mathrm{e}^{(1-\sqrt{8})x} - \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{x}\,, \quad C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 4
Osserviamo che per $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) \sim \left[\frac{2}{x^4} - \frac{2}{x^2(x+1)^2} + \frac{8}{6x^6(x+1)^6}\right] x^4 = \left[\frac{2x^2 + 4x + 2 - 2x^2}{x^4(x+1)^2} + \frac{8}{6x^6(x+1)^6}\right] x^4 \sim \frac{4}{x}\,;$$

pertanto, l'integrale proposto non converge.

Esercizio 5
Osserviamo che

$$\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^n \to 1 \iff \mathrm{e}^{n\log\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)} \to 1 \iff n\log\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right) \to 0 \iff n\log\left(1 + \frac{a_n - b_n}{1+b_n}\right) \to 0\,;$$

pertanto, poiché $\frac{a_n - b_n}{1+b_n} \to 0$ e $\log\left(1 + \frac{a_n - b_n}{1+b_n}\right) \sim \frac{a_n - b_n}{1+b_n}$, si deve necessariamente avere

$$n\frac{a_n - b_n}{1+b_n} \to 0 \quad \text{che equivale a} \quad \frac{\frac{a_n - b_n}{1+b_n}}{\frac{1}{n}} \to 0\,.$$

Quindi, per definizione, da quest'ultima condizione si ricava $\frac{a_n - b_n}{1+b_n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.