SOLUZIONI COMPITO dell'8/09/2014
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno non negativo per ogni $x \in \mathbb{R}$; possiamo quindi procedere utilizzando, ad esempio, il criterio della radice. In tal caso otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{2^n[\log(1+2|x|)]^n}{(2n+1)(n+2)}} \sim \frac{2\log(1+2|x|)}{\sqrt[n]{2n\cdot n}} \to 2\log(1+2|x|)\,.$$

Pertanto, la serie risulterà essere convergente se $2\log(1+2|x|) < 1$, ovvero per $1+2|x| < \mathrm{e}^{1/2}$, che fornisce $-(\sqrt{\mathrm{e}}-1)/2 < x < (\sqrt{\mathrm{e}}-1)/2$, e sarà, invece, divergente per $x < -(\sqrt{\mathrm{e}}-1)/2$ e $x > (\sqrt{\mathrm{e}}-1)/2$. Infine, per $x = \pm(\sqrt{\mathrm{e}}-1)/2$, il criterio non fornisce alcuna informazione, ma sostituendo nel termine generale della serie otteniamo $a_n = \frac{1}{(2n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{2n^2}$, che fornisce una serie convergente, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.
In conclusione, la serie proposta convergerà se e solo se $-(\sqrt{\mathrm{e}}-1)/2 \le x \le (\sqrt{\mathrm{e}}-1)/2$.

Esercizio 2

L'integrale proposto si può risolvere effettuando la sostituzione $t = \cos(3x^2)$, da cui $-\frac{1}{6}\,dt = x\sin(3x^2)\,dx$, $t(0) = 1$, $t(\sqrt{\pi/3}) = -1$. Quindi ricaviamo

$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} \frac{x\sin(3x^2)}{2+\cos(3x^2)}\,dx = -\frac{1}{6}\int_1^{-1}\frac{1}{2+t}\,dt = \frac{1}{6}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2+t}\,dt = \frac{1}{6}\log(2+t)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{6}\log 3 = \log\sqrt[6]{3}\,.$$

Esercizio 3

Poiché l'arcotangente è una funzione definita su tutto l'asse reale, l'unica condizione da imporre affinché f sia ben definita è che il denominatore non si annulli, ovvero $x \neq 0; 1$. Quindi $C.E. = (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$. Inoltre,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\pi/2}{x(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\pi/2}{x^2} = 0$$

$\Longrightarrow \quad y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$;

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} -\frac{2x(x+3)}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} -\frac{6x}{x} = -6$$

$\Longrightarrow \quad$ quindi $x = 0$ è un punto in cui f è prolungabile con continuità;

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm}\frac{\arctan 8}{x-1} = \pm\infty$$

$\Longrightarrow \quad x = 1$ è asintoto verticale per $x \to 1^\pm$.

Osserviamo che nel secondo limite abbiamo utilizzato il fatto che $\arctan y \sim y$, per $y \to 0$, con $y = 2x(x+3)$.

Esercizio 4

Osserviamo, innanzitutto, che l'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm\sqrt{2}i$; pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x)$. Utilizzando, inoltre, il metodo di somiglianza, si ricava subito che una soluzione particolare è $y_p(x) = 1/2$, pertanto l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x) + 1/2$. Imponendo, ora, le condizioni richieste, si ricava

$$C_1 + 1/2 = y(0) = y\big(\pi/(2\sqrt{2})\big) = C_2 + 1/2 \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = C_2\,.$$

Quindi, ci saranno infinite soluzioni del problema proposto, date da

$$y(x) = C_1[\cos(\sqrt{2}x) + \sin(\sqrt{2}x)] + 1/2\,, \qquad \forall C_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 5

Osserviamo che l'unica affermazione corretta è la D), in quanto applicando il criterio della radice otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(a_n b_n)^n} = \lim_{n\to+\infty} (a_n b_n) = 0 < 1\,,$$

dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo utilizzato l'ipotesi che le due successioni sono infinitesime. Invece le altre affermazioni sono false, poiché prendendo, ad esempio, $a_n = b_n = 1/\sqrt{\log n}$ si ottiene che la A) è falsa in quanto

$$\sum_n a_n b_n = \sum_n \frac{1}{\sqrt{\log n}\cdot\sqrt{\log n}} = \sum_n \frac{1}{\log n} = +\infty$$

e la C) è falsa in quanto

$$\sum_n \left(\frac{a_n b_n}{n}\right) = \sum_n \left(\frac{1}{n\sqrt{\log n}\cdot\sqrt{\log n}}\right) = \sum_n \left(\frac{1}{n\log n}\right) = +\infty\,.$$

Infine, la B) è falsa, in quanto prendendo $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 2$ e $a_n = b_n = 0$, per $n \geq 3$, si ricava

$$\sum_n a_n b_n = 1 + 4 = 5 \neq (\sum_n a_n)(\sum_n b_n) = 3\cdot 3 = 9\,.$$

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno non negativo per ogni $x \in \mathbb{R}$; possiamo quindi procedere utilizzando, ad esempio, il criterio della radice. In tal caso otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{[\log(1+|3x|)]^n}{3^n(\sqrt{n}-1)(2\sqrt{n}+3)}} \sim \frac{\log(1+|3x|)}{3\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot 2\sqrt{n}}} \to \frac{\log(1+|3x|)}{3}\,.$$

Pertanto, la serie risulterà essere convergente se $\frac{\log(1+|3x|)}{3} < 1$, ovvero per $1+|3x| < \mathrm{e}^3$, che fornisce $-(\mathrm{e}^3-1)/3 < x < (\mathrm{e}^3-1)/3$, e sarà, invece, divergente per $x < -(\mathrm{e}^3-1)/3$ e $x > (\mathrm{e}^3-1)/3$. Infine, per $x = \pm(\mathrm{e}^3-1)/3$, il criterio non fornisce alcuna informazione, ma sostituendo nel termine generale della serie otteniamo $a_n = \frac{1}{(\sqrt{n}-1)(2\sqrt{n}+3)} \sim \frac{1}{2n}$, che fornisce una serie divergente, in quanto si tratta della serie armonica.

In conclusione, la serie proposta convergerà se e solo se $-(\mathrm{e}^3-1)/3 < x < (\mathrm{e}^3-1)/3$.

Esercizio 2

L'integrale proposto si può risolvere effettuando la sostituzione $t = \sin(2\sqrt{x})$, da cui $dt = \frac{\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$, $t(\pi^2/64) = 1/\sqrt{2}$, $t(\pi^2/16) = 1$. Quindi ricaviamo

$$\int_{\pi^2/64}^{\pi^2/16} \frac{\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}(2+\sin(2\sqrt{x}))}\,dx = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \left(\frac{1}{2+t}\right)dt = \log(2+t)\Big|_{1/\sqrt{2}}^{1} = \log 3 - \log(2+1/\sqrt{2}) = \log\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}\right).$$

Esercizio 3

Poiché l'arcotangente è una funzione definita su tutto l'asse reale, l'unica condizione da imporre affinché f sia ben definita è che il denominatore non si annulli, ovvero $x \neq \pm 2$. Quindi $C.E. = (-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$. Inoltre,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pi/2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pi/2}{x^2} = 0\\
&\Longrightarrow \qquad y = 0 \text{ è asintoto orizzontale per } x \to \pm\infty;\\
&\lim_{x\to -2^\pm} f(x) = \lim_{x\to -2^\pm} -\frac{3x(x+2)}{4(x+2)} = \lim_{x\to -2^\pm} \frac{6(x+2)}{4(x+2)} = 3/2\\
&\Longrightarrow \qquad \text{quindi } x = -2 \text{ è un punto in cui } f \text{ è prolungabile con continuità;}\\
&\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \lim_{x\to 2^\pm} \frac{\arctan(24)}{4(x-2)} = \pm\infty\\
&\Longrightarrow \qquad x = 2 \text{ è asintoto verticale per } x \to 2^\pm.
\end{aligned}$$

Osserviamo che nel secondo limite abbiamo utilizzato il fatto che $\arctan y \sim y$, per $y \to 0$, con $y = 3x(x+2)$.

Esercizio 4

Osserviamo, innanzitutto, che l'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 4 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 2$; pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{2x}$. Utilizzando, inoltre, il metodo di somiglianza, si ricava subito che una soluzione particolare è $y_p(x) = -1/4$, pertanto l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{2x} - 1/4$. Imponendo, ora, le condizioni richieste, si ricava

$$C_1\mathrm{e}^{2} + C_2\mathrm{e}^{-2} - 1/4 = y(-1) = y(1) = C_1\mathrm{e}^{-2} + C_2\mathrm{e}^{2} - 1/4 \implies C_1(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}) = C_2(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}) \implies C_1 = C_2\,.$$

Quindi, ci saranno infinite soluzioni del problema proposto, date da

$$y(x) = C_1[\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{2x}] - 1/4\,, \qquad \forall C_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 5

Osserviamo che l'unica affermazione corretta è la B), in quanto applicando il criterio della radice otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(a_n b_n)^n} = \lim_{n\to+\infty} (a_n b_n) = 0 < 1\,,$$

dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo utilizzato l'ipotesi che le due successioni sono infinitesime. Invece le altre affermazioni sono false, poiché prendendo, ad esempio, $a_n = b_n = 1/\sqrt{\log n}$ si ottiene che la D) è falsa in quanto

$$\sum_n a_n b_n = \sum_n \frac{1}{\sqrt{\log n}\cdot\sqrt{\log n}} = \sum_n \frac{1}{\log n} = +\infty$$

e la A) è falsa in quanto

$$\sum_n \left(\frac{a_n b_n}{n}\right) = \sum_n \left(\frac{1}{n\sqrt{\log n}\cdot\sqrt{\log n}}\right) = \sum_n \left(\frac{1}{n\log n}\right) = +\infty\,.$$

Infine, la C) è falsa, in quanto prendendo $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 2$ e $a_n = b_n = 0$, per $n \geq 3$, si ricava

$$\sum_n a_n b_n = 1 + 4 = 5 \neq (\sum_n a_n)(\sum_n b_n) = 3\cdot 3 = 9\,.$$