SOLUZIONI COMPITO del 6/07/2016
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA - MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1

Innanzitutto osserviamo che la funzione proposta può essere riscritta nella forma

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 5x & \text{se } x \geq 1; \\ 8x^2 - 5x & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 8x^2 = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -2x^2 = -\infty\,,$$

da cui si ricava subito che f non ammette estremanti assoluti, poiché $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$. Per quanto riguarda gli estremanti relativi, derivando, ove possibile, si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} -4x + 5 & \text{se } x > 1, \\ 16x - 5 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Pertanto, $f'(x) > 0$ se $-4x + 5 > 0$, ovvero $1 < x < 5/4$, oppure se $16x - 5 > 0$, ovvero $5/16 < x < 1$, mentre $f'(x) < 0$ altrove in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Quindi, $x = 5/4$ è punto di massimo relativo, mentre $x = 5/16$ è punto di minimo relativo.

Esercizio 2

Innanzitutto, tenendo conto che $\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - \frac{1}{n} \to 1$ (e quindi $\left[\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right] \to 0$), e che $\log(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = \left[\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right]$, possiamo riscrivere

$$a_n := \log\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - \frac{1}{n}\right) = \log\left(1 + \left[\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right]\right) \sim \left[\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right].$$

Ricordando, infine, lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \sqrt{1+t}$, con $t = 2/n$, ovvero

$$\sqrt{1 + \frac{2}{n}} = 1 + \binom{1/2}{1}\frac{2}{n} + \binom{1/2}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\frac{2}{n} - \frac{1}{8}\frac{4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

otteniamo

$$a_n \sim 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - 1 - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2}\,.$$

Pertanto, poiché la serie è a termini definitivamente di segno fissato, per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$, si ricava che la serie proposta converge.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta risulta essere un'equazione del primo ordine a variabili separabili e priva di integrali singolari. Poiché, posta $f(x) = \frac{e^x}{n^2+1}$ e $g(y) = \frac{1}{\tan^2 y + 1}$, si ha che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(-\pi/2, \pi/2)$, il problema di Cauchy proposto ammette un'unica soluzione definita in un intorno del punto iniziale $x_0 = \log 2$. Separando le variabili ed integrando, otteniamo

$$\tan y(x) = \int [(\tan y)^2 + 1]\, dy = \frac{1}{n^2+1}\int e^x\, dx = \frac{1}{n^2+1}\, e^x + C \quad \text{da cui} \quad y(x) = \arctan\left(\frac{1}{n^2+1}\, e^x + C\right).$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$0 = y(\log 2) = \arctan\left(\frac{2}{n^2+1} + C\right), \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = \frac{2}{n^2+1} + C\,, \qquad \Longrightarrow \qquad C = -\frac{2}{n^2+1}\,.$$

Quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la soluzione del problema di Cauchy è $y_n(x) = \arctan\left(\frac{e^x - 2}{n^2+1}\right)$. Calcolando, infine, il limite richiesto, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 y_n(-n) = \lim_{n\to+\infty} n^2 \arctan\left(\frac{e^{-n} - 2}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{e^{-n} - 2}{n^2+1}\right) = -\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{2}{n^2} = -2\,,$$

dove abbiamo tenuto conto che, poiché $\left(\frac{e^{-n}-2}{n^2+1}\right) \to 0$ per $n \to +\infty$, possiamo scrivere $\arctan\left(\frac{e^{-n}-2}{n^2+1}\right) \sim \left(\frac{e^{-n}-2}{n^2+1}\right)$.

Esercizio 4

Osserviamo che la funzione integranda è continua su $(0, 2]$, pertanto per stabilire se l'integrale proposto esiste finito, è sufficiente studiarne il comportamento per $x \to 0^+$. Tenendo conto che, per $x \to 0^+$, $\log^2(1 + 2x^2) \sim (2x^2)^2 \to 0$ e $\sin[\log^2(1 + 2x^2)] \sim \log^2(1 + 2x^2)$, otteniamo

$$x^{4\alpha-6} \sin[\log^2(1 + 2x^2)] \sim x^{4\alpha-6} \log^2(1 + 2x^2) \sim x^{4\alpha-6} 4x^4 = \frac{4}{x^{2-4\alpha}}\,.$$

Quindi, l'integrale proposto converge se e solo se $2 - 4\alpha < 1$, ovvero $\alpha > 1/4$.

Esercizio 5

Osserviamo che l'affermazione è falsa, basta considerare

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{\log n}} \to 0^+\,, \qquad b_n = \sqrt[4]{\log n} \to +\infty\,, \qquad c_n = \frac{1}{n\sqrt{\log n}}\,,$$

dove si è tenuto conto del fatto che

$$\frac{\frac{1}{n\sqrt{\log n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n\sqrt{\log n}}\,n = \frac{1}{\sqrt{\log n}} \to 0 \qquad \Longrightarrow \qquad c_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$

Infatti, in tal caso si ricava

$$\frac{a_n c_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{\log n}}\,\frac{1}{n\sqrt{\log n}}}{\sqrt[4]{\log n}} = \frac{1}{n \log n}\,,$$

che è proprio il termine generale di una serie divergente, in quanto si tratta della serie di Abel di esponenti $p = q = 1$.

TEMA B

Esercizio 1

Innanzitutto osserviamo che la funzione proposta può essere riscritta nella forma

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 12x & \text{se } x \geq 2; \\ -10x^2 + 12x & \text{se } x < 2. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -10x^2 = -\infty\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty\,,$$

da cui si ricava subito che f non ammette estremanti assoluti, poiché $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$. Per quanto riguarda gli estremanti relativi, derivando, ove possibile, si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 12 & \text{se } x > 2, \\ -20x + 12 & \text{se } x < 2. \end{cases}$$

Pertanto, $f'(x) > 0$ se $4x-12 > 0$, ovvero $x > 3$, oppure se $-20x+12 > 0$, ovvero $x < 3/5$, mentre $f'(x) < 0$ altrove in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Quindi, $x = 3/5$ è punto di massimo relativo, mentre $x = 3$ è punto di minimo relativo.

Esercizio 2

Innanzitutto, tenendo conto che $\cos \frac{4}{\sqrt{n}} + \frac{8}{n} \to 1$ (e quindi $\left[\cos \frac{4}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{8}{n}\right] \to 0$), e che $\log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = \left[\cos \frac{4}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{8}{n}\right]$, possiamo riscrivere

$$a_n := \log\left(\cos \frac{4}{\sqrt{n}} + \frac{8}{n}\right) = \log\left(1 + \left[\cos \frac{4}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{8}{n}\right]\right) \sim \left[\cos \frac{4}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{8}{n}\right].$$

Ricordando, infine, lo sviluppo di Mc Laurin al quarto ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 4/\sqrt{n}$, ovvero

$$\cos \frac{4}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)^4 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{8}{n} + \frac{32}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

otteniamo

$$a_n \sim 1 - \frac{8}{n} + \frac{32}{3n^2} - 1 + \frac{8}{n} = \frac{32}{3n^2}.$$

Pertanto, poiché la serie è a termini definitivamente di segno fissato, per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$, si ricava che la serie proposta converge.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta risulta essere un'equazione del primo ordine a variabili separabili e priva di integrali singolari. Poiché, posta $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n^3+2}$ e $g(y) = y^2 + 1$, si ha che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, il problema di Cauchy proposto ammette un'unica soluzione definita in un intorno del punto iniziale $x_0 = -\log 3$. Separando le variabili ed integrando, otteniamo

$$\arctan y(x) = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{n^3+2}\int \mathrm{e}^{-x}\,dx = -\frac{1}{n^3+2}\,\mathrm{e}^{-x} + C \quad \text{da cui} \quad y(x) = \tan\left(C - \frac{1}{n^3+2}\,\mathrm{e}^{-x}\right).$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$0 = y(-\log 3) = \tan\left(C - \frac{3}{n^3+2}\right), \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = C - \frac{3}{n^3+2}, \qquad \Longrightarrow \qquad C = \frac{3}{n^3+2}.$$

Quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la soluzione del problema di Cauchy è $y_n(x) = \tan\left(\frac{3-\mathrm{e}^{-x}}{n^3+2}\right)$. Calcolando, infine, il limite richiesto, otteniamo

$$\lim_{n \to +\infty} n^3 y_n(n) = \lim_{n \to +\infty} n^3 \tan\left(\frac{3-\mathrm{e}^{-n}}{n^3+2}\right) = \lim_{n \to +\infty} n^3 \left(\frac{3-\mathrm{e}^{-n}}{n^3+2}\right) = \lim_{n \to +\infty} n^3\,\frac{3}{n^3} = 3\,,$$

dove abbiamo tenuto conto che, poiché $\left(\frac{3-\mathrm{e}^{-n}}{n^3+2}\right) \to 0$ per $n \to +\infty$, possiamo scrivere $\tan\left(\frac{3-\mathrm{e}^{-n}}{n^3+2}\right) \sim \left(\frac{3-\mathrm{e}^{-n}}{n^3+2}\right)$.

Esercizio 4

Osserviamo che la funzione integranda è continua su $(0,3]$, pertanto per stabilire se l'integrale proposto esiste finito, è sufficiente studiarne il comportamento per $x \to 0^+$. Tenendo conto che, per $x \to 0^+$, $\sin^2(3x^3) \sim (3x^3)^2 \to 0$ e $\log[1+\sin^2(3x^3)] \sim \sin^2(3x^3)$, otteniamo

$$x^{-10-3\alpha}\log[1+\sin^2(3x^3)] \sim x^{-10-3\alpha}\sin^2(3x^3) \sim x^{-10-3\alpha}9x^6 = \frac{9}{x^{4+3\alpha}}\,.$$

Quindi, l'integrale proposto converge se e solo se $4+3\alpha<1$, ovvero $\alpha<-1$.

Esercizio 5

Osserviamo che l'affermazione è falsa, basta considerare

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{\log n}} \to 0^+\,, \qquad b_n = \sqrt[4]{\log n} \to +\infty\,, \qquad c_n = \frac{1}{n\sqrt{\log n}}\,,$$

dove si è tenuto conto del fatto che

$$\frac{\frac{1}{n\sqrt{\log n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n\sqrt{\log n}}\,n = \frac{1}{\sqrt{\log n}} \to 0 \qquad \Longrightarrow \qquad c_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$

Infatti, in tal caso si ricava

$$\frac{a_n c_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{\log n}}\,\frac{1}{n\sqrt{\log n}}}{\sqrt[4]{\log n}} = \frac{1}{n\log n}\,,$$

che è proprio il termine generale di una serie divergente, in quanto si tratta della serie di Abel di esponenti $p=q=1$.