SOLUZIONI COMPITO del 6/09/2016
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA - MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1
L'equazione proposta è un'equazione algebrica di quarto grado, pertanto avrà 4 soluzioni al più coincidenti, come affermato dal Teorema Fondamentale dell'Algebra. Osserviamo che tale equazione si può riscrivere nella forma $z^4 = -4i$, che corrisponde a determinare le 4 radici quarte di $-4i$, ovvero

$$z = \sqrt[4]{-4i} = \sqrt[4]{4\mathrm{e}^{-i\pi/2}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i(-\pi/2+2k\pi)/4} = \begin{cases} \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\pi/8}\,, \\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{3i\pi/8}\,, \\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{7i\pi/8}\,, \\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{11i\pi/8}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2
Osservando che la serie proposta è a termini non negativi, possiamo applicare il criterio della radice, ottenendo

$$\sqrt[n]{\frac{n}{n+2n^3}\left(\frac{\log x - 1}{\cos\frac{1}{n}}\right)^{2n}} \sim \sqrt[n]{\frac{1}{2n^2}}\left(\frac{\log x - 1}{\cos\frac{1}{n}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2}\frac{(\log x - 1)^2}{(\cos\frac{1}{n})^2} \to (\log x - 1)^2\,.$$

Pertanto, la serie risulta convergente per

$$(\log x - 1)^2 < 1 \iff -1 < \log x - 1 < 1 \iff 0 < \log x < 2 \iff 1 < x < \mathrm{e}^2\,,$$

mentre è divergente per $\{0 < x < 1\} \cup \{x > \mathrm{e}^2\}$. Per $x = 1; \mathrm{e}^2$, il criterio non dà informazioni; quindi procediamo per altra via. Sostituendo tali valori ed osservando che $(\cos\frac{1}{n})^{2n} = \mathrm{e}^{2n\log(\cos\frac{1}{n})} \to 1$, pur essendo un caso di indecisione $[1^\infty]$, in quanto

$$2n\log[\cos(1/n)] = 2n\log[1 + (\cos(1/n) - 1)] \sim 2n[\cos(1/n) - 1] \sim -2n\,\frac{1}{2n^2} = -\frac{1}{n} \to 0\,,$$

otteniamo

$$a_n := \frac{n}{n+2n^3}\,\frac{1}{(\cos\frac{1}{n})^{2n}} \sim \frac{1}{2n^2}\,,$$

che fornisce una serie convergente per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta risulta essere un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $4\lambda^2 + 9 = 0$ che ha per soluzioni $\lambda = \pm 3i/2$. Pertanto, l'integrale generale dell'omogenea è $y_0(x) = C_1\cos(3x/2) + C_2\sin(3x/2)$. Per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa utilizziamo il metodo di somiglianza che fornisce $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, da cui $y_p'(x) = 2Ax + B$ e $y_p''(x) = 2A$. Inserendo nell'equazione completa ricaviamo

$$\begin{cases} 9A = 3\,, \\ 9B = 0\,, \\ 8A + 9C = -1/3\,, \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1/3\,, \\ B = 0\,, \\ C = -1/3\,. \end{cases}$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione completa è $y(x) = C_1\cos(3x/2) + C_2\sin(3x/2) + \frac{1}{3}(x^2 - 1)$. Infine, imponendo le condizioni iniziali, otteniamo

$$\begin{cases} -C_2 + \pi^2/3 - 1/3 = \pi^2/3\,, \\ 3C_1/2 + 2\pi/3 = 2\pi/3 + 1\,, \end{cases} \implies \begin{cases} C_2 = -1/3\,, \\ C_1 = 2/3\,. \end{cases}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \frac{2}{3}\cos(3x/2) - \frac{1}{3}\sin(3x/2) + \frac{1}{3}(x^2 - 1)$.

Esercizio 4

Ricordiamo che, per determinare tutte le primitive della funzione proposta, dobbiamo procedere attraverso l'integrazione indefinita della funzione stessa. A tal fine, osserviamo che $\sin(2x) = 2\sin x\,\cos x$; pertanto, effettuando la sostituzione $t = \sin x$, da cui $dt = \cos x\,dx$, otteniamo

$$\begin{aligned}
&\int \sin(2x)\arctan(2\sin x)\,dx = 2\int \sin x\,\arctan(2\sin x)\,\cos x\,dx = 2\int t\arctan(2t)\,dt \\
=&2\,\frac{t^2}{2}\,\arctan(2t) - \int t^2\,\frac{2}{1+4t^2}\,dt = t^2\arctan(2t) - \frac{1}{2}\int \frac{(4t^2+1)-1}{4t^2+1}\,dt \\
=&t^2\arctan(2t) - \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{4}\int \frac{2}{4t^2+1}\,dt = t^2\arctan(2t) - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\,\arctan(2t) + C \\
&= (\sin x)^2\arctan(2\sin x) - \frac{\sin x}{2} + \frac{\arctan(2\sin x)}{4} + C\,,
\end{aligned}$$

dove, nella terza uguaglianza, è stata effettuata anche un'integrazione per parti.

Esercizio 5

a) L'affermazione è errata, basta considerare la funzione $f(x) = x$, che nell'intervallo $[0, +\infty)$ ha il suo punto di minimo assoluto in $x = 0$, ma $f'(0) = 1$.

b) L'affermazione è errata, basta considerare la funzione $f(x) = (x-1)^3$ che in $x = 1$ ha la derivata nulla, in quanto $f'(x) = 3(x-1)^2$, ma tale punto è un flesso e non un estremante poiché $f' \geq 0$ su tutto il dominio (cioè la derivata non cambia segno in un intorno del punto stazionario $x = 1$).

c) L'affermazione è vera; infatti, applicando il teorema di de l'Hospital, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{3x} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{3} = 1\,,$$

e quest'ultimo risultato corrisponde, per definizione, ad affermare che $f(x) \sim 3x$, per $x \to +\infty$.

TEMA B

Esercizio 1

L'equazione proposta è un'equazione algebrica di quarto grado, pertanto avrà 4 soluzioni al più coincidenti, come affermato dal Teorema Fondamentale dell'Algebra. Osserviamo che tale equazione si può riscrivere nella forma $z^4 = 9i$, che corrisponde a determinare le 4 radici quarte di $9i$, ovvero

$$z = \sqrt[4]{9i} = \sqrt[4]{9\mathrm{e}^{i\pi/2}} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{i(\pi/2+2k\pi)/4} = \begin{cases} \sqrt{3}\mathrm{e}^{i\pi/8}\,, \\ \sqrt{3}\mathrm{e}^{5i\pi/8}\,, \\ \sqrt{3}\mathrm{e}^{9i\pi/8}\,, \\ \sqrt{3}\mathrm{e}^{13i\pi/8}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Osservando che la serie proposta è a termini non negativi, possiamo applicare il criterio della radice, ottenendo

$$\sqrt[n]{\frac{2n}{\sqrt{n}+n^2}\left(\frac{2\cosh\frac{1}{n}}{\log^2 x+1}\right)^n} \sim \sqrt[n]{\frac{2}{n}}\left(\frac{2\cosh\frac{1}{n}}{\log^2 x+1}\right) = \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}}\frac{2\cosh\frac{1}{n}}{\log^2 x+1} \to \frac{2}{\log^2 x+1}\,.$$

Pertanto, la serie risulta convergente per

$$\frac{2}{\log^2 x+1} < 1 \quad\iff\quad \log^2 x > 1 \quad\iff\quad \log x < -1 \text{ oppure } \log x > 1 \quad\iff\quad 0 < x < 1/\mathrm{e} \text{ oppure } x > \mathrm{e}\,,$$

mentre è divergente per $\{1/\mathrm{e} < x < \mathrm{e}\}$. Per $x = 1/\mathrm{e}; \mathrm{e}$, il criterio non dà informazioni; quindi procediamo per altra via. Sostituendo tali valori ed osservando che $(\cosh\frac{1}{n})^n = \mathrm{e}^{n\log(\cosh\frac{1}{n})} \to 1$, pur essendo un caso di indecisione $[1^\infty]$, in quanto

$$n\log[\cosh(1/n)] = n\log[1+(\cosh(1/n)-1)] \sim n[\cosh(1/n)-1] \sim n\,\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n} \to 0\,,$$

otteniamo

$$a_n := \frac{2n}{\sqrt{n}+n^2}\left(\frac{2\cosh\frac{1}{n}}{2}\right)^n \sim \frac{2}{n}\,,$$

che fornisce una serie divergente in quanto, a meno di un fattore moltiplicativo, coincide con la serie armonica.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta risulta essere un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $9\lambda^2 + 4 = 0$ che ha per soluzioni $\lambda = \pm 2i/3$. Pertanto, l'integrale generale dell'omogenea è $y_0(x) = C_1\cos(2x/3) + C_2\sin(2x/3)$. Per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa utilizziamo il metodo di somiglianza che fornisce $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, da cui $y_p'(x) = 2Ax + B$ e $y_p''(x) = 2A$. Inserendo nell'equazione completa ricaviamo

$$\begin{cases} 4A = 2\,, \\ 4B = 0\,, \\ 18A + 4C = 7\,, \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{cases} A = 1/2\,, \\ B = 0\,, \\ C = -1/2\,. \end{cases}$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione completa è $y(x) = C_1\cos(2x/3) + C_2\sin(2x/3) + \frac{1}{2}(x^2-1)$. Infine, imponendo le condizioni iniziali, otteniamo

$$\begin{cases} C_2 + 9\pi^2/32 - 1/2 = 9\pi^2/32\,, \\ -2C_1/3 + 3\pi/4 = 3\pi/4 + 1\,, \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{cases} C_2 = 1/2\,, \\ C_1 = -3/2\,. \end{cases}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = -\frac{3}{2}\cos(2x/3) + \frac{1}{2}\sin(2x/3) + \frac{1}{2}(x^2-1)$.

Esercizio 4

Ricordiamo che, per determinare tutte le primitive della funzione proposta, dobbiamo procedere attraverso l'integrazione indefinita della funzione stessa. A tal fine, osserviamo che $\sin(2x) = 2\sin x \, \cos x$; pertanto, effettuando la sostituzione $t = \cos x$, da cui $dt = -\sin x \, dx$, otteniamo

$$\begin{aligned}
&\int \sin(2x) \log(1+\cos x)\, dx = 2\int \cos x \, \log(1+\cos x) \, \sin x \, dx = -2\int t \log(1+t)\, dt \\
&= -2\,\frac{t^2}{2}\,\log(1+t) + \int t^2 \,\frac{1}{1+t}\, dt = -t^2 \log(1+t) + \int \frac{(t^2-1)+1}{1+t}\, dt \\
&= -\,t^2 \log(1+t) + \int (t-1)\, dt + \int \frac{1}{1+t}\, dt = -t^2 \log(1+t) + \frac{(t-1)^2}{2} + \log(1+t) + C \\
&= -(\cos x)^2 \log(1+\cos x) + \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + \log(1+\cos x) + C\,,
\end{aligned}$$

dove, nella terza uguaglianza, è stata effettuata anche un'integrazione per parti.

Esercizio 5

a) L'affermazione è errata, basta considerare la funzione $f(x) = x$, che nell'intervallo $[0, +\infty)$ ha il suo punto di minimo assoluto in $x = 0$, ma $f'(0) = 1$.

b) L'affermazione è errata, basta considerare la funzione $f(x) = (x-1)^3$ che in $x = 1$ ha la derivata nulla, in quanto $f'(x) = 3(x-1)^2$, ma tale punto è un flesso e non un estremante poiché $f' \geq 0$ su tutto il dominio (cioè la derivata non cambia segno in un intorno del punto stazionario $x = 1$).

c) L'affermazione è vera; infatti, applicando il teorema di de l'Hospital, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{3x} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{3} = 1\,,$$

e quest'ultimo risultato corrisponde, per definizione, ad affermare che $f(x) \sim 3x$, per $x \to +\infty$.