SOLUZIONI COMPITO del 8/06/2016
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA - MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1
Ricordando che

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\,, \qquad \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)\,, \quad \text{con } t = \sinh x\,,$$

otteniamo

$$f(x) = \left[(\sinh x) - \frac{(\sinh x)^3}{6} + o\big((\sinh x)^3\big)\right]^3 = \left[\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)\right]^3$$
$$= \left[x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]^3 = x^3 + o(x^5)\,.$$

Quindi il polinomio di Mc Laurin di grado 5 relativo alla funzione proposta sarà $P_5(x) = x^3$.

Esercizio 2
Riscrivendo $\left(\sin\frac{3}{n^2}+1\right)^{\frac{n}{n^2+1}} = \exp\left[\frac{n}{n^2+1}\log\left(\sin\frac{3}{n^2}+1\right)\right]$ ed osservando che $\sin\left(\frac{3}{n^2}\right) \sim \frac{3}{n^2} \to 0$, ricaviamo che $\log\left(\sin\frac{3}{n^2}+1\right) \sim \sin\left(\frac{3}{n^2}\right) \sim \frac{3}{n^2}$, e quindi

$$\frac{n}{n^2+1}\log\left(\sin\frac{3}{n^2}+1\right) \sim \frac{1}{n}\,\frac{3}{n^2} = \frac{3}{n^3} \to 0\,.$$

Inoltre, ricordando che $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$ con $\varepsilon_n = \frac{n}{n^2+1}\log\left(\sin\frac{3}{n^2}+1\right) \sim \frac{3}{n^3}$, otteniamo

$$a_n := \frac{n^4+1}{4n}\left[\left(\sin\frac{3}{n^2}+1\right)^{\frac{n}{n^2+1}} - 1\right] = \frac{n^4+1}{4n}\left\{\exp\left[\frac{n}{n^2+1}\log\left(\sin\frac{3}{n^2}+1\right)\right] - 1\right\} \sim \frac{n^4}{4n}\,\frac{3}{n^3} = \frac{3}{4}\,.$$

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta risulta essere un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ che ha per soluzioni $\lambda = 2; 3$. Pertanto, l'integrale generale dell'omogenea è $y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. Per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa utilizziamo il metodo di somiglianza e quello di sovrapposizione, tenendo conto che $\lambda = 2$ è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità pari ad 1. Quindi avremo $y_p(x) = y_{1p}(x) + y_{2p}(x)$ con $y_{1p}(x) = x(Ax+B)e^{2x}$, da cui $y_{1p}'(x) = (2Ax + B + 2Ax^2 + 2Bx)e^{2x}$ e $y_{1p}''(x) = (2A + 4Ax + 2B + 4Ax + 2B + 4Ax^2 + 4Bx)e^{2x}$, e $y_{2p}(x) = C$. Inserendo nell'equazione completa ricaviamo

$$\begin{cases} 8A + 4B - 10A - 10B + 6B = 2\,, \\ 2A + 4B - 5B = 0\,, \\ 6C = 3\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} B = 2A\,, \\ -2A = 2\,, \\ C = 1/2\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A = -1\,, \\ B = -2\,, \\ C = 1/2\,. \end{cases}$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione completa è $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - (x^2 + 2x)e^{2x} + \frac{1}{2}$. Infine, imponendo le condizioni iniziali, otteniamo

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1/2 = 1/2\,, \\ 2C_1 + 3C_2 - 2 = 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C_2 = -C_1\,, \\ 2C_1 - 3C_1 = 2\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 = -2\,, \\ C_2 = 2\,. \end{cases}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = 2(e^{3x} - e^{2x}) - (x^2 + 2x)e^{2x} + \frac{1}{2}$.

Esercizio 4

Osserviamo che la funzione integranda è continua su $[2, +\infty)$, pertanto per stabilire se l'integrale proposto esiste finito, è sufficiente studiarne il comportamento per $x \to +\infty$. Tenendo conto che, per $x \to +\infty$, $\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} - 1 \sim \frac{1}{3x^3} \to 0$ e $\sinh\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} - 1\right) \sim \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} - 1\right)$, otteniamo

$$x^{2\alpha+1} \sinh\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} - 1\right) \sim x^{2\alpha+1}\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} - 1\right) \sim x^{2\alpha+1}\frac{1}{3x^3} = \frac{1}{3x^{2-2\alpha}} .$$

Quindi, l'integrale proposto converge se e solo se $2 - 2\alpha > 1$, ovvero $\alpha < 1/2$.

Esercizio 5

a) L'affermazione è errata, basta considerare la funzione $f(x) = \sin x$, che è definita e limitata su $[0, +\infty)$, ma non ammette limite per $x \to +\infty$.

b) L'affermazione è errata, basta considerare la funzione $f(x) = 1/x$, per $x > 0$, e $f(0) = 0$, che è definita (ma non continua) su $[0, +\infty)$, ha limite finito (precisamente pari a 0) per $x \to +\infty$, ma non è limitata, poiché $f(x) \to +\infty$, per $x \to 0^+$.

c) L'affermazione è vera; infatti, essendo f continua, per il Teorema di Weierstrass si ha che per ogni $M > 0$, f è limitata nell'intervallo chiuso e limitato $[0, M]$, quindi potrebbe essere illimitata solo per $x \to +\infty$, ma ciò non è possibile, visto che per ipotesi essa ha limite finito per $x \to +\infty$.

TEMA B

Esercizio 1
Ricordando che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\,, \qquad \sinh t = t + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)\,, \quad \text{con } t = \sin x\,,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[(\sin x) + \frac{(\sin x)^3}{6} + o\big((\sin x)^3\big)\right]^2 = \left[\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)\right]^2 \\ &= \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]^2 = x^2 + o(x^4)\,. \end{aligned}$$

Quindi il polinomio di Mc Laurin di grado 4 relativo alla funzione proposta sarà $P_4(x) = x^2$.

Esercizio 2
Riscrivendo $\left(\tan\frac{2}{n^3}+1\right)^{\frac{n}{n^3+1}} = \exp\left[\frac{n}{n^3+1}\log\left(\tan\frac{2}{n^3}+1\right)\right]$ ed osservando che $\tan\left(\frac{2}{n^3}\right) \sim \frac{2}{n^3} \to 0$, ricaviamo che $\log\left(\tan\frac{2}{n^3}+1\right) \sim \tan\left(\frac{2}{n^3}\right) \sim \frac{2}{n^3}$, e quindi

$$\frac{n}{n^3+1}\log\left(\tan\frac{2}{n^3}+1\right) \sim \frac{1}{n^2}\,\frac{2}{n^3} = \frac{2}{n^5} \to 0\,.$$

Inoltre, ricordando che $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$ con $\varepsilon_n = \frac{n}{n^3+1}\log\left(\tan\frac{2}{n^3}+1\right) \sim \frac{2}{n^5}$, otteniamo

$$a_n := \frac{n^8+1}{3n^3}\left[\left(\tan\frac{2}{n^3}+1\right)^{\frac{n}{n^3+1}} - 1\right] = \frac{n^8+1}{3n^3}\left\{\exp\left[\frac{n}{n^3+1}\log\left(\tan\frac{2}{n^3}+1\right)\right] - 1\right\} \sim \frac{n^8}{3n^3}\,\frac{2}{n^5} = \frac{2}{3}\,.$$

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta risulta essere un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ che ha per soluzioni $\lambda = 1; 3$. Pertanto, l'integrale generale dell'omogenea è $y_0(x) = C_1e^x + C_2e^{3x}$. Per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa utilizziamo il metodo di somiglianza e quello di sovrapposizione, tenendo conto che $\lambda = 3$ è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità pari ad 1. Quindi avremo $y_p(x) = y_{1p}(x) + y_{2p}(x)$ con $y_{1p}(x) = x(Ax+B)e^{3x}$, da cui $y'_{1p}(x) = (2Ax + B + 3Ax^2 + 3Bx)e^{3x}$ e $y''_{1p}(x) = (2A + 6Ax + 3B + 6Ax + 3B + 9Ax^2 + 9Bx)e^{3x}$, e $y_{2p}(x) = C$. Inserendo nell'equazione completa ricaviamo

$$\begin{cases} 12A + 9B - 8A - 12B + 3B = 3\,, \\ 2A + 6B - 4B = 0\,, \\ 3C = 6\,, \end{cases} \implies \begin{cases} 4A = 3\,, \\ A = -B\,, \\ C = 2\,, \end{cases} \implies \begin{cases} A = 3/4\,, \\ B = -3/4\,, \\ C = 2\,. \end{cases}$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione completa è $y(x) = C_1e^x + C_2e^{3x} + \frac{3}{4}(x^2 - x)e^{3x} + 2$. Infine, imponendo le condizioni iniziali, otteniamo

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 2 = 0\,, \\ C_1 + 3C_2 - 3/4 = -3/4\,, \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = -3C_2\,, \\ -3C_2 + C_2 = -2\,, \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = -3\,, \\ C_2 = 1\,. \end{cases}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = -3e^x + e^{3x} + \frac{3}{4}(x^2 - x)e^{3x} + 2$.

Esercizio 4

Osserviamo che la funzione integranda è continua su $[4,+\infty)$, pertanto per stabilire se l'integrale proposto esiste finito, è sufficiente studiarne il comportamento per $x \to +\infty$. Tenendo conto che, per $x \to +\infty$, $\sqrt[5]{1+\frac{1}{x^5}} - 1 \sim \frac{1}{5x^5} \to 0$ e $\tanh\left(\sqrt[5]{1+\frac{1}{x^5}} - 1\right) \sim \left(\sqrt[5]{1+\frac{1}{x^5}} - 1\right)$, otteniamo

$$x^{3-2\alpha} \tanh\left(\sqrt[5]{1+\frac{1}{x^5}} - 1\right) \sim x^{3-2\alpha}\left(\sqrt[5]{1+\frac{1}{x^5}} - 1\right) \sim x^{3-2\alpha}\frac{1}{5x^5} = \frac{1}{5x^{2+2\alpha}}\,.$$

Quindi, l'integrale proposto converge se e solo se $2+2\alpha > 1$, ovvero $\alpha > -1/2$.

Esercizio 5

a) L'affermazione è errata, basta considerare la funzione $f(x) = \sin x$, che è definita e limitata su $[0,+\infty)$, ma non ammette limite per $x \to +\infty$.

b) L'affermazione è errata, basta considerare la funzione $f(x) = 1/x$, per $x > 0$, e $f(0) = 0$, che è definita (ma non continua) su $[0,+\infty)$, ha limite finito (precisamente pari a 0) per $x \to +\infty$, ma non è limitata, poiché $f(x) \to +\infty$, per $x \to 0^+$.

c) L'affermazione è vera; infatti, essendo f continua, per il Teorema di Weierstrass si ha che per ogni $M > 0$, f è limitata nell'intervallo chiuso e limitato $[0,M]$, quindi potrebbe essere illimitata solo per $x \to +\infty$, ma ciò non è possibile, visto che per ipotesi essa ha limite finito per $x \to +\infty$.