SOLUZIONI COMPITO del 12/01/2017
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

i) Osserviamo che effettuando la divisione si ottiene $w = -\frac{\sqrt{9+4\alpha^2}}{3-2i\alpha} \cdot \frac{3+2i\alpha}{3+2i\alpha} = -\frac{3}{\sqrt{9+4\alpha^2}} - i\frac{2\alpha}{\sqrt{9+4\alpha^2}}$. Poiché $|w| = \sqrt{\left(-\frac{3}{\sqrt{9+4\alpha^2}}\right)^2 + \left(-\frac{2\alpha}{\sqrt{9+4\alpha^2}}\right)^2} = 1$, si ricava che il valore α cercato è quello tale per cui

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{\sqrt{9+4\alpha^2}} = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,; \\ -\dfrac{2\alpha}{\sqrt{9+4\alpha^2}} = \sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha < 0\,; \\ 18 = 9 + 4\alpha^2\,; \\ 8\alpha^2 = 9 + 4\alpha^2\,; \end{cases}$$

da cui segue che $\alpha = -3/2$ e $w = \mathrm{e}^{i(3\pi/4)}$.

ii) Ponendo $z = x + iy$ si ha che $\mathrm{e}^{-2y+i2x} = \mathrm{e}^{2iz} = \frac{\mathrm{e}}{w} = \mathrm{e}^{1-i(3\pi/4)}$ e dunque

$$\begin{cases} -2y = 1\,, \\ 2x = -3\pi/4 + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y = -1/2\,, \\ x = -3\pi/8 + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases}$$

che implica $z = -(3/8 + k)\pi - i/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che la quantità $(1 - 2\mathrm{e}^{x^2-2})$ ha segno variabile ed, in particolare, $(1 - 2\mathrm{e}^{x^2-2}) > 0$ se e solo se $-\sqrt{2-\log 2} < x < \sqrt{2 - \log 2}$. Pertanto, studiamo l'assoluta convergenza applicando il criterio della radice, da cui risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\left|1 - 2\mathrm{e}^{x^2-2}\right|^n}{n\log(n+2)}} = \left|1 - 2\mathrm{e}^{x^2-2}\right| =: \ell\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sqrt[n]{\log(n+2)} \to 1$ e $\sqrt[n]{n} \to 1$, per $n \to +\infty$. Consideriamo ora i tre possibili casi.

1. Se $\ell = \left|1 - 2\mathrm{e}^{x^2-2}\right| < 1$, la serie converge assolutamente, e quindi semplicemente. In particolare, la disequazione $\left|1 - 2\mathrm{e}^{x^2-2}\right| < 1$ equivale a $-1 < 1 - 2\mathrm{e}^{x^2-2} < 1$ che ha per soluzione $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.
2. Se $\ell = \left|1 - 2\mathrm{e}^{x^2-2}\right| > 1$, cioè $x < -\sqrt{2} \ \vee \ x > \sqrt{2}$, la serie non converge assolutamente, ed inoltre il termine n-esimo non è infinitesimo, dunque la serie proposta non converge neppure semplicemente.
3. Se $\ell = \left|1 - 2\mathrm{e}^{x^2-2}\right| = 1$, cioè $x = \pm\sqrt{2}$, il criterio della radice non dà alcuna informazione. Sostituendo tali valori nella serie proposta si ottiene $\sum \frac{(-1)^n}{n\log(n+2)}$, che risulta una serie di segno alternato non assolutamente convergente per confronto con la serie di Abel di esponenti $p = q = 1$. Si vede facilmente che $a_n := \frac{1}{n\log(n+2)}$ è una successione decrescente e infinitesima. Pertanto, per il criterio di Leibniz la serie converge semplicemente.

Infine, nel caso $x = \pm\sqrt{2}$, per stimare l'errore commesso approssimando la somma S della serie con la somma parziale S_9 dei primi 9 termini, applichiamo nuovamente il criterio di Leibniz ottenendo $|S - S_9| \leq a_{10} = 1/(10\log 12)$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Ponendo $f(x) = 2x + \sqrt{2}$ e $g(y) = -\frac{\sin^5 y}{4\cos y}$ si osserva che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(-\pi/2, \pi/2)$, pertanto esiste un intorno U di $\sqrt{2}$ ed un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1(U)$ del problema proposto. Poiché l'equazione differenziale ha come integrali singolari le funzioni $y(x) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, che non soddisfano la condizione iniziale, la soluzione del problema di Cauchy andrà cercata separando le variabili. In tal modo otteniamo

$$\frac{1}{\sin^4 y} = \int -\frac{4\cos y}{\sin^5 y}\, dy = \int (2x+\sqrt{2})dx = x^2 + \sqrt{2}x + c\,, \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \arcsin\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+c}}\right).$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} = y\left(\sqrt{2}\right) = \arcsin\left(\sqrt[4]{\frac{1}{4+c}}\right)$ che implica $c = 0$, ovvero la soluzione cercata sarà $y(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+\sqrt{2}x}}\right)$.

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda f è definita e continua in $\mathbb{R}$ e la funzione $x \mapsto x^2$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, anche la funzione integrale $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e quindi, in particolare, non ammette asintoti verticali. Tenendo conto che, per definizione,

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t(t-1)}{4\pi + t^2 + \arctan t}\, dt\,,$$

per stabilire se quest'ultimo integrale improprio converge è sufficiente studiare il comportamento di f per $t \to +\infty$, dove abbiamo

$$f(t) \sim \frac{t\mathrm{e}^t}{t^2} = \frac{\mathrm{e}^t}{t} \to +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad f \text{ non è impropriamente integrabile.}$$

Pertanto, essendo $f \geq 0$ in $(1, +\infty)$, si ottiene che F diverge a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$, quindi F non ammette asintoti orizzontali. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{F(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} F'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2x\, \frac{\mathrm{e}^{x^2}(x^2-1)}{4\pi + x^4 + \arctan(x^2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{x} = \pm\infty\,,$$

la funzione F non ammette asintoti obliqui.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) L'affermazione $a)$ è falsa, infatti per le ipotesi fatte si ha

$$\frac{\sin[\sqrt{g(n)}]}{\log[1 + f(\sqrt[6]{n})]} \sim \frac{\sqrt{g(n)}}{f(\sqrt[6]{n})} \sim \frac{1/\sqrt{n}}{1/(\sqrt[6]{n})^3} = 1 \not\to 0\,,$$

quindi il termine generale non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza. Come controesempio possiamo prendere $f(x) = 1/x^3$ e $g(x) = 1/x$.

L'affermazione $b)$ è vera, infatti per le ipotesi fatte si ha

$$g\left(\frac{1}{\sin(1/n)}\right)[1 - \cos(f(\sqrt{n})] \sim \sin(1/n)\, \frac{[f(\sqrt{n})]^2}{2} \sim \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^3}\right)^2 = \frac{1}{2n^4}\,,$$

e quindi la serie converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $4 > 1$.

TEMA B

Esercizio 1

i) Osserviamo che effettuando la divisione si ottiene $w = \frac{\sqrt{1+16\alpha^2}}{1+4i\alpha} \cdot \frac{1-4i\alpha}{1-4i\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+16\alpha^2}} - i\frac{4\alpha}{\sqrt{1+16\alpha^2}}$. Poiché $|w| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1+16\alpha^2}}\right)^2 + \left(-\frac{4\alpha}{\sqrt{1+16\alpha^2}}\right)^2} = 1$, si ricava che il valore α cercato è quello tale per cui

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+16\alpha^2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,; \\ -\dfrac{4\alpha}{\sqrt{1+16\alpha^2}} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha < 0\,; \\ 2 = 1 + 16\alpha^2\,; \\ 32\alpha^2 = 1 + 16\alpha^2\,; \end{cases}$$

da cui segue che $\alpha = -1/4$ e $w = \mathrm{e}^{i(\pi/4)}$.

ii) Ponendo $z = x + iy$ si ha che $\mathrm{e}^{2y-i2x} = \mathrm{e}^{-2iz} = \frac{1}{\mathrm{e}w} = \mathrm{e}^{-1-i(\pi/4)}$ e dunque

$$\begin{cases} 2y = -1\,, \\ -2x = -\pi/4 + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y = -1/2\,, \\ x = \pi/8 + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases}$$

che implica $z = (1/8 + k)\pi - i/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che la quantità $(1 - \mathrm{e}^{2-x^2})$ ha segno variabile ed, in particolare, $(1 - \mathrm{e}^{2-x^2}) > 0$ se e solo se $x < -\sqrt{2} \,\vee\, x > \sqrt{2}$. Pertanto, studiamo l'assoluta convergenza applicando il criterio della radice, da cui risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\left|1 - \mathrm{e}^{2-x^2}\right|^n}{\sqrt{n}\log(n+1)}} = \left|1 - \mathrm{e}^{2-x^2}\right| =: \ell\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sqrt[n]{\log(n+1)} \to 1$ e $\sqrt[n]{\sqrt{n}} \to 1$, per $n \to +\infty$. Consideriamo ora i tre possibili casi.

1. Se $\ell = \left|1 - \mathrm{e}^{2-x^2}\right| < 1$, la serie converge assolutamente, e quindi semplicemente. In particolare, la disequazione $\left|1 - \mathrm{e}^{2-x^2}\right| < 1$ equivale a $-1 < 1 - \mathrm{e}^{2-x^2} < 1$ che ha per soluzione $x < -\sqrt{2 - \log 2} \,\vee\, x > \sqrt{2 - \log 2}$.
2. Se $\ell = \left|1 - \mathrm{e}^{2-x^2}\right| > 1$, cioè $-\sqrt{2 - \log 2} < x < \sqrt{2 - \log 2}$, la serie non converge assolutamente, ed inoltre il termine n-esimo non è infinitesimo, dunque la serie proposta non converge neppure semplicemente.
3. Se $\ell = \left|1 - \mathrm{e}^{2-x^2}\right| = 1$, cioè $x = \pm\sqrt{2 - \log 2}$, il criterio della radice non dà alcuna informazione. Sostituendo tali valori nella serie proposta si ottiene $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\log(n+1)}$, che risulta una serie di segno alternato non assolutamente convergente per confronto con la serie di Abel di esponenti $p = 1/2$ e $q = 1$. Si vede facilmente che $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}$ è una successione decrescente e infinitesima. Pertanto, per il criterio di Leibniz la serie converge semplicemente.

Infine, nel caso $x = \pm\sqrt{2 - \log 2}$, per stimare l'errore commesso approssimando la somma S della serie con la somma parziale S_{99} dei primi 99 termini, applichiamo nuovamente il criterio di Leibniz ottenendo $|S - S_{99}| \leq a_{100} = 1/(10\log 101)$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Ponendo $f(x) = 3x^2 + 4x$ e $g(y) = \frac{\cos^5 y}{4\sin y}$ si osserva che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(0, \pi)$, pertanto esiste un intorno U di 2 ed un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1(U)$ del problema proposto. Poiché l'equazione differenziale ha come integrali singolari le funzioni $y(x) = (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, che non soddisfano la condizione iniziale, la soluzione del problema di Cauchy andrà cercata separando le variabili. In tal modo otteniamo

$$\frac{1}{\cos^4 y} = \int \frac{4\sin y}{\cos^5 y}\,dy = \int (3x^2 + 4x)dx = x^3 + 2x^2 + c\,, \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \arccos\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x^3 + 2x^2 + c}}\right).$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = y(2) = \arccos\left(\sqrt[4]{\frac{1}{16+c}}\right)$ che implica $c = 0$, ovvero la soluzione cercata sarà $y(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3+2x^2}}\right)$.

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda f è definita e continua in $\mathbb{R}$ e la funzione $x \mapsto x^2 - 2$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, anche la funzione integrale $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e quindi, in particolare, non ammette asintoti verticali. Tenendo conto che, per definizione,

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{\log[1+(t+2)^2]t}{2+|t+2|+\cos t}\, dt\,,$$

per stabilire se quest'ultimo integrale improprio converge è sufficiente studiare il comportamento di f per $t \to +\infty$, dove abbiamo

$$f(t) \sim \frac{t\log(t^2)}{t} = 2\log t \to +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad f \text{ non è impropriamente integrabile.}$$

Pertanto, essendo $f \geq 0$ in $(1, +\infty)$, si ottiene che F diverge a $-\infty$ per $x \to \pm\infty$, quindi F non ammette asintoti orizzontali. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{F(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} F'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} -2x\,\frac{\log(1+x^4)(x^2-2)}{2+x^2+\cos(x^2-2)} = \lim_{x\to\pm\infty} -2x\log(x^4) = \mp\infty\,,$$

la funzione F non ammette asintoti obliqui.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) L'affermazione a) è vera, infatti per le ipotesi fatte si ha

$$\frac{\sin[\sqrt{f(n)}]}{\log[1+g(\sqrt{n})]} \sim \frac{\sqrt{f(n)}}{g(\sqrt{n})} \sim \frac{\sqrt{1/n^3}}{1/\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\,,$$

quindi la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica.

L'affermazione b) è falsa, infatti per le ipotesi fatte si ha

$$\frac{f\left(\frac{1}{\sin(1/n)}\right)}{1-\cos[(g(\sqrt{n}))^3]} \sim \frac{\sin^3(1/n)}{(g(\sqrt{n}))^6/2} \sim \frac{2(1/n^3)}{(1/\sqrt{n})^6} = 2 \not\to 0\,,$$

quindi il termine generale non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza. Come controesempio possiamo prendere $f(x) = 1/x^3$ e $g(x) = 1/x$.

TEMA C

Esercizio 1

i) Osserviamo che effettuando la divisione si ottiene $w = -\frac{\sqrt{1+25\alpha^2}}{1-5i\alpha} \cdot \frac{1+5i\alpha}{1+5i\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{1+25\alpha^2}} - i\frac{5\alpha}{\sqrt{1+25\alpha^2}}$. Poiché $|w| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{1+25\alpha^2}}\right)^2 + \left(-\frac{5\alpha}{\sqrt{1+25\alpha^2}}\right)^2} = 1$, si ricava che il valore α cercato è quello tale per cui

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{1+25\alpha^2}} = \cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,; \\ -\dfrac{5\alpha}{\sqrt{1+25\alpha^2}} = \sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha > 0\,; \\ 2 = 1 + 25\alpha^2\,; \\ 50\alpha^2 = 1 + 25\alpha^2\,; \end{cases}$$

da cui segue che $\alpha = 1/5$ e $w = \mathrm{e}^{i(5\pi/4)}$.

ii) Ponendo $z = x + iy$ si ha che $\mathrm{e}^{2y-i2x} = \mathrm{e}^{-2iz} = \frac{\mathrm{e}}{w} = \mathrm{e}^{1-i(5\pi/4)}$ e dunque

$$\begin{cases} 2y = 1\,, \\ -2x = -5\pi/4 + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y = 1/2\,, \\ x = 5\pi/8 + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases}$$

che implica $z = (5/8 + k)\pi + i/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che la quantità $(1 - 2\mathrm{e}^{3-x^2})$ ha segno variabile ed, in particolare, $(1 - 2\mathrm{e}^{3-x^2}) > 0$ se e solo se $x < -\sqrt{3+\log 2} \ \vee \ x > \sqrt{3+\log 2}$. Pertanto, studiamo l'assoluta convergenza applicando il criterio della radice, da cui risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\left|1 - 2\mathrm{e}^{3-x^2}\right|^n}{\sqrt{n}\log(\sqrt{n}+5)}} = \left|1 - 2\mathrm{e}^{3-x^2}\right| =: \ell\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sqrt[n]{\log(\sqrt{n}+5)} \to 1$ e $\sqrt[n]{\sqrt{n}} \to 1$, per $n \to +\infty$. Consideriamo ora i tre possibili casi.

1. Se $\ell = \left|1 - 2\mathrm{e}^{3-x^2}\right| < 1$, la serie converge assolutamente, e quindi semplicemente. In particolare, la disequazione $\left|1 - 2\mathrm{e}^{3-x^2}\right| < 1$ equivale a $-1 < 1 - 2\mathrm{e}^{3-x^2} < 1$ che ha per soluzione $x < -\sqrt{3} \ \vee \ x > \sqrt{3}$.
2. Se $\ell = \left|1 - 2\mathrm{e}^{3-x^2}\right| > 1$, cioè $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, la serie non converge assolutamente, ed inoltre il termine n-esimo non è infinitesimo, dunque la serie proposta non converge neppure semplicemente.
3. Se $\ell = \left|1 - 2\mathrm{e}^{3-x^2}\right| = 1$, cioè $x = \pm\sqrt{3}$, il criterio della radice non dà alcuna informazione. Sostituendo tali valori nella serie proposta si ottiene $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\log(\sqrt{n}+5)}$, che risulta una serie di segno alternato non assolutamente convergente per confronto con la serie di Abel di esponenti $p = 1/2$ e $q = 1$. Si vede facilmente che $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}\log(\sqrt{n}+5)}$ è una successione decrescente e infinitesima. Pertanto, per il criterio di Leibniz la serie converge semplicemente.

Infine, nel caso $x = \pm\sqrt{3}$, per stimare l'errore commesso approssimando la somma S della serie con la somma parziale S_{99} dei primi 99 termini, applichiamo nuovamente il criterio di Leibniz ottenendo $|S - S_{99}| \le a_{100} = 1/(10\log 15)$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Ponendo $f(x) = 2x-3$ e $g(y) = \frac{\cos^3 y}{2\sin y}$ si osserva che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(0,\pi)$, pertanto esiste un intorno U di 4 ed un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1(U)$ del problema proposto. Poiché l'equazione differenziale ha come integrali singolari le funzioni $y(x) = (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, che non soddisfano la condizione iniziale, la soluzione del problema di Cauchy andrà cercata separando le variabili. In tal modo otteniamo

$$\frac{1}{\cos^2 y} = \int \frac{2\sin y}{\cos^3 y}\, dy = \int (2x-3)dx = x^2 - 3x + c\,, \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{x^2-3x+c}}\right).$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = y\,(4) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{4+c}}\right)$ che implica $c = 0$, ovvero la soluzione cercata sarà $y(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}\right)$.

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda f è definita e continua in $\mathbb{R}$ e la funzione $x \mapsto x^2 - 2$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, anche la funzione integrale $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e quindi, in particolare, non ammette asintoti verticali. Tenendo conto che, per definizione,

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{\log[1+(t+2)^4]t}{4+2|t+2|+\cos[(t+2)^2]}\,dt\,,$$

per stabilire se quest'ultimo integrale improprio converge è sufficiente studiare il comportamento di f per $t \to +\infty$, dove abbiamo

$$f(t) \sim \frac{t\log(t^4)}{2t} = 2\log t \to +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad f \text{ non è impropriamente integrabile.}$$

Pertanto, essendo $f \geq 0$ in $(1, +\infty)$, si ottiene che F diverge a $-\infty$ per $x \to \pm\infty$, quindi F non ammette asintoti orizzontali. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{F(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} F'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} -2x\,\frac{\log(1+x^8)(x^2-2)}{4+2x^2+\cos(x^4)} = \lim_{x\to\pm\infty} -x\log(x^8) = \mp\infty\,,$$

la funzione F non ammette asintoti obliqui.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) L'affermazione a) è vera, infatti per le ipotesi fatte si ha

$$\frac{\sin[\sqrt{f(n)}]}{\log[1+g(\sqrt{n})]} \sim \frac{\sqrt{f(n)}}{g(\sqrt{n})} \sim \frac{\sqrt{1/n^3}}{1/\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\,,$$

quindi la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica.

L'affermazione b) è falsa, infatti per le ipotesi fatte si ha

$$\frac{f\left(\frac{1}{\sin(1/n)}\right)}{1-\cos[(g(\sqrt{n}))^3]} \sim \frac{\sin^3(1/n)}{(g(\sqrt{n}))^6/2} \sim \frac{2(1/n^3)}{(1/\sqrt{n})^6} = 2 \not\to 0\,,$$

quindi il termine generale non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza. Come controesempio possiamo prendere $f(x) = 1/x^3$ e $g(x) = 1/x$.

TEMA D

Esercizio 1

i) Osserviamo che effettuando la divisione si ottiene $w = \frac{\sqrt{4+9\alpha^2}}{2-3i\alpha} \cdot \frac{2+3i\alpha}{2+3i\alpha} = \frac{2}{\sqrt{4+9\alpha^2}} + i\frac{3\alpha}{\sqrt{4+9\alpha^2}}$. Poiché $|w| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{4+9\alpha^2}}\right)^2 + \left(\frac{3\alpha}{\sqrt{4+9\alpha^2}}\right)^2} = 1$, si ricava che il valore α cercato è quello tale per cui

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4+9\alpha^2}} = \cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,; \\ \dfrac{3\alpha}{\sqrt{4+9\alpha^2}} = \sin\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha < 0\,; \\ 8 = 4 + 9\alpha^2\,; \\ 18\alpha^2 = 4 + 9\alpha^2\,; \end{cases}$$

da cui segue che $\alpha = -2/3$ e $w = \mathrm{e}^{i(7\pi/4)}$.

ii) Ponendo $z = x + iy$ si ha che $\mathrm{e}^{-2y+i2x} = \mathrm{e}^{2iz} = \frac{1}{\mathrm{e}w} = \mathrm{e}^{-1-i(7\pi/4)}$ e dunque

$$\begin{cases} -2y = -1\,, \\ 2x = -7\pi/4 + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y = 1/2\,, \\ x = -7\pi/8 + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases}$$

che implica $z = -(7/8 + k)\pi + i/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che la quantità $(1 - \mathrm{e}^{x^2-3})$ ha segno variabile ed, in particolare, $(1 - \mathrm{e}^{x^2-3}) > 0$ se e solo se $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. Pertanto, studiamo l'assoluta convergenza applicando il criterio della radice, da cui risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\left|1 - \mathrm{e}^{x^2-3}\right|^n}{n\sqrt{\log(n+4)}}} = \left|1 - \mathrm{e}^{x^2-3}\right| =: \ell\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sqrt[n]{\sqrt{\log(n+4)}} \to 1$ e $\sqrt[n]{n} \to 1$, per $n \to +\infty$. Consideriamo ora i tre possibili casi.

1. Se $\ell = \left|1 - \mathrm{e}^{x^2-3}\right| < 1$, la serie converge assolutamente, e quindi semplicemente. In particolare, la disequazione $\left|1 - \mathrm{e}^{x^2-3}\right| < 1$ equivale a $-1 < 1 - \mathrm{e}^{x^2-3} < 1$ ed ha per soluzione $-\sqrt{3+\log 2} < x < \sqrt{3+\log 2}$.
2. Se $\ell = \left|1 - \mathrm{e}^{x^2-3}\right| > 1$, cioè $x < -\sqrt{3+\log 2} \ \vee\ x > \sqrt{3+\log 2}$, la serie non converge assolutamente, ed inoltre il termine n-esimo non è infinitesimo, dunque la serie proposta non converge neppure semplicemente.
3. Se $\ell = \left|1 - \mathrm{e}^{x^2-3}\right| = 1$, cioè $x = \pm\sqrt{3+\log 2}$, il criterio della radice non dà alcuna informazione. Sostituendo tali valori nella serie proposta si ottiene $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\log(n+4)}}$, che risulta una serie di segno alternato non assolutamente convergente per confronto con la serie di Abel di esponenti $p = 1$ e $q = 1/2$. Si vede facilmente che $a_n := \frac{1}{n\sqrt{\log(n+4)}}$ è una successione decrescente e infinitesima. Pertanto, per il criterio di Leibniz la serie converge semplicemente.

Infine, nel caso $x = \pm\sqrt{3+\log 2}$, per stimare l'errore commesso approssimando la somma S della serie con la somma parziale S_9 dei primi 9 termini, applichiamo nuovamente il criterio di Leibniz ottenendo $|S - S_9| \le a_{10} = 1/(10\sqrt{\log 14})$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Ponendo $f(x) = 3x^2 + 2\sqrt[3]{2}x$ e $g(y) = -\frac{\sin^3 y}{2\cos y}$ si osserva che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(-\pi/2, \pi/2)$, pertanto esiste un intorno U di $\sqrt[3]{2}$ ed un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1(U)$ del problema proposto. Poiché l'equazione differenziale ha come integrali singolari le funzioni $y(x) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, che non soddisfano la condizione iniziale, la soluzione del problema di Cauchy andrà cercata separando le variabili. In tal modo otteniamo

$$\frac{1}{\sin^2 y} = \int -\frac{2\cos y}{\sin^3 y}\, dy = \int (3x^2 + 2\sqrt[3]{2}x) dx = x^3 + \sqrt[3]{2}x^2 + c\,, \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{x^3 + \sqrt[3]{2}x^2 + c}}\right).$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} = y\left(\sqrt[3]{2}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{4+c}}\right)$ che implica $c = 0$, ovvero la soluzione cercata sarà $y(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+\sqrt[3]{2}x^2}}\right)$.

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda f è definita e continua in $\mathbb{R}$ e la funzione $x \mapsto x^2$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, anche la funzione integrale $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e quindi, in particolare, non ammette asintoti verticali. Tenendo conto che, per definizione,

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{2t}(t-1)}{2\pi + 2t^2 + \arctan(t^2)}\, dt\,,$$

per stabilire se quest'ultimo integrale improprio converge è sufficiente studiare il comportamento di f per $t \to +\infty$, dove abbiamo

$$f(t) \sim \frac{te^{2t}}{2t^2} = \frac{e^{2t}}{2t} \to +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad f \text{ non è impropriamente integrabile.}$$

Pertanto, essendo $f \geq 0$ in $(1, +\infty)$, si ottiene che F diverge a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$, quindi F non ammette asintoti orizzontali. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{F(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} F'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2x\, \frac{e^{2x^2}(x^2-1)}{2\pi + 2x^4 + \arctan(x^4)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{2x^2}}{x} = \pm\infty\,,$$

la funzione F non ammette asintoti obliqui.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) L'affermazione a) è falsa, infatti per le ipotesi fatte si ha

$$\frac{\sin[\sqrt{g(n)}]}{\log[1 + f(\sqrt[6]{n})]} \sim \frac{\sqrt{g(n)}}{f(\sqrt[6]{n})} \sim \frac{1/\sqrt{n}}{1/(\sqrt[6]{n})^3} = 1 \not\to 0\,,$$

quindi il termine generale non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza. Come controesempio possiamo prendere $f(x) = 1/x^3$ e $g(x) = 1/x$.

L'affermazione b) è vera, infatti per le ipotesi fatte si ha

$$g\left(\frac{1}{\sin(1/n)}\right)[1 - \cos(f(\sqrt{n})] \sim \sin(1/n)\, \frac{[f(\sqrt{n})]^2}{2} \sim \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^3}\right)^2 = \frac{1}{2n^4}\,,$$

e quindi la serie converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $4 > 1$.