Sapienza Università di Roma
Ingegneria Meccanica
Analisi Matematica 1 – Esercitazioni
Dott. Ezio Di Costanzo

Richiami di teoria

Forme indeterminate, limiti notevoli, relazioni asintotiche, precauzioni nell'uso delle relazioni asintotiche.

Esercizio 1[1]. Calcolare:

(i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n;$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1}{e^{\frac{n}{2}}\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right)};$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left[\log\left(1+\frac{3}{n}\right)\right]-\log\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha}, \quad \alpha\in\mathbb{R};$

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^4+n^3-1}-\sqrt{n^4-n^3+n}}{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4-n^3}};$

(v) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{n^3+n+1}-\sqrt[5]{n^3-n}}{\sqrt[5]{n^3+n^2}-\sqrt[5]{n^3-n^2-n}};$

(vi) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(2\cos n^2-n^2\right);$

(vii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sin n\left[\log\frac{(n+1)^3}{n^3+1}\right];$

(viii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sin\left(2\pi\sqrt[3]{n^3+n^2}\right);$

Ulteriori esercizi

Esercizio 1. Calcolare

(i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^{\log n^n}$ $[+\infty];$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{\frac{\log n}{n}}-1}{i^{2n}+\log n^2}n$ $\left[\frac{\log 2}{2}\right];$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\left(\sin^4 n\right)\right)^{\frac{n}{4}}$ $[0];$

[1] In parte da http://www.dmmm.uniroma1.it/persone/micol.amar

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n 2^n}{(2n)!}$ [0];

(v) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3^n n! \log(1+2^{-n}))$ [$+\infty$].

Esercizio 2. Individuare l'errore nei seguenti procedimenti e scrivere lo svolgimento corretto.

(i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}$.

Utilizzando $\tan\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$, ricaviamo $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = 0$.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Utilizzando $\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$, ricaviamo $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n^2 \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) =$

$\displaystyle= \lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \log e = 1$.

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n^2+n}}{e^{n^2-1}}$.

Utilizzando $(n^2+n) \sim n^2$ e $(n^2-1) \sim n^2$, ricaviamo $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n^2+n}}{e^{n^2-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n^2}}{e^{n^2}} = 1$.

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$;

Utilizzando $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \sim \left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)$, ricaviamo $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3} =$
$= e$.