Sapienza Università di Roma
Ingegneria Civile
Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio
Analisi Matematica 1
Prof. Ezio Di Costanzo

Argomenti di teoria

Forme indeterminate, limiti notevoli, relazioni asintotiche, precauzioni nell'uso delle relazioni asintotiche.

Esercizio 1[1]**.** Calcolare:

(i) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$ $\quad[\sqrt{e}]$;

(ii) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1}{e^{\frac{n}{2}}\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}$ $\quad[0]$;

(iii) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^4+n^3-1}-\sqrt{n^4-n^3+n}}{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4-n^3}}$ $\quad[1]$;

(iv) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{n^3+n+1}-\sqrt[5]{n^3-n}}{\sqrt[5]{n^3+n^2}-\sqrt[5]{n^3-n^2-n}}$ $\quad[0]$;

(v) $\lim_{n\to+\infty}\left(2\cos n^2-n^2\right)$ $\quad[-\infty]$;

(vi) $\lim_{n\to+\infty}\sin n\left[\log\frac{(n+1)^3}{n^3+1}\right]$ $\quad[0]$;

(vii) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^{\log n^n}$ $\quad[+\infty]$;

(viii) $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{\frac{\log n}{n}}-1}{i^{2n}+\log n^2}n$ $\quad\left[\frac{\log 2}{2}\right]$;

(ix) $\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\left(\sin^4 n\right)\right)^{\frac{n}{4}}$ $\quad[0]$;

(x) $\lim_{n\to+\infty}3^n n!\log(1+2^{-n}))$ $\quad[+\infty]$.

Esercizio 2. Individuare l'<u>**errore**</u> nei seguenti procedimenti e scrivere lo svolgimento corretto.

(i) $\lim_{n\to+\infty}n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
Utilizzando $\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, ricaviamo $\lim_{n\to+\infty}n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}n^2\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=$
$=\lim_{n\to+\infty}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=\log e=1.$ $\quad[+\infty]$

[1] In parte da http://www.dmmm.uniroma1.it/persone/micol.amar

(*ii*) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{n^2+n}}{e^{n^2-1}}$.

Utilizzando $(n^2+n) \sim n^2$ e $(n^2-1) \sim n^2$, ricaviamo $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{n^2+n}}{e^{n^2-1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{n^2}}{e^{n^2}} = 1$. $[+\infty]$

(*iii*) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3}$;

Utilizzando $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \sim \left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)$, ricaviamo $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^3} =$
$= e$. $[+\infty]$

(*iv*) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(2\pi\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)$;

Utilizzando $\sqrt[3]{n^3+n^2} \sim \sqrt[3]{n^3} = n$, ricaviamo $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(2\pi\sqrt[3]{n^3+n^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin(2\pi n) =$
0 $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Argomenti di teoria

Serie a termini non negativi e serie a termini di segno variabile. Criteri di convergenza: criterio del rapporto, criterio della radice, criterio del confronto, criterio del confronto asintotico, criterio di Leibniz.

Esercizio 3[2]**.** Stabilire, eventualmente al variare dei parametri, il carattere delle seguenti serie numeriche:

(*i*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{\sin^3 \frac{1}{\sqrt[3]{n}}} - 1}{\sqrt[3]{n}}\right)$ [converge];

(*ii*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{n(x^2+x-1)}}{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$ $\left[\text{converge se } \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \text{indeterminata se } x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$;

(*iii*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos n}{3n^2+2\sqrt{n}}$ [converge].

(*iv*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(n - \sqrt[3]{n^3-2n}\right)^x$ [converge se $x > 1$, diverge se $x \le 1$];

(*v*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n\log n + \sin n}{n^2+5}$ [converge];

(*vi*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\frac{\cos \pi n}{n^3+3}$ [converge];

[2] In parte da http://www.sbai.uniroma1.it/persone/micol.amar

(vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(3^{\frac{1}{n}}-1)$ [converge];

$(viii)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left((\log_2 x)^2-3\right)^n}{n^{\sqrt{2}+3}}, \quad x\in\mathbb{R}^+$ $\Big[$converge se $1/4 \le x \le 2^{-\sqrt{2}} \vee 2^{\sqrt{2}} \le x \le 4$, diverge a $+\infty$ se $0 < x < 1/4 \vee x > 4$, indeterminata se $2^{-\sqrt{2}} < x < 2^{\sqrt{2}}\Big]$.