Sapienza Università di Roma
Facoltà di Ingegneria dell'Informazione Informatica e Statistica
Precorso di Matematica
Dott. Ezio Di Costanzo

Argomenti di teoria

Elevamento a potenza con esponente intero, razionale e reale. Esponenziali e logaritmi. Equazioni esponenziali e logaritmiche.

Esercizi

Esercizio 1. Dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false motivando la risposta:

(*i*) $((-2)^2)^{1/4} = (-2)^{1/2}$;

(*ii*) $((3)^3)^{1/6} = (3)^{1/2}$;

(*iii*) $\log x^8 = 4 \log x^2, \quad \forall x \neq 0$;

(*iv*) $\log x^2 = 2 \log x, \quad \forall x \neq 0$;

(*v*) $\sqrt{x^2} = x, \quad \forall x$;

(*vi*) $\sqrt{e^2} = e$;

(*vii*) $|3^{-x}| = 3^x$.

(Soluzioni. (*i*) F; (*ii*) V; (*iii*) V; (*iv*) F; (*v*) F; (*vi*) V; (*vii*) F)

Esercizio 2. Calcolare

(*i*) $\log_3 \frac{1}{9}$;

(*ii*) $\log_{\frac{1}{3}} 27$;

(*iii*) $\log_{\sqrt{2}} 1$;

(*iv*) $\log_5 0.04$;

(*v*) $\log_{10} \frac{1}{\sqrt{10}}$;

(*vi*) $\log_\pi \pi^2$;

(*vii*) $\log \sqrt[3]{e}$;

$(viii)$ $\log_{10} 0.01$;

(ix) $\log_3 7 \log_7 27$;

(x) $\log_2 3 \log_9 4$

(Soluzioni. (i) -2; (ii) -3; (iii) 0; (iv) -2; (v) -1/2; (vi) 2; (vii) 1/3; $(viii)$ -2; (ix) 3; (x) 1)

Esercizio 3. Risolvere le seguenti equazioni esponenziali:

(i) $\sqrt[3]{5^x} = \dfrac{25\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}}$;

(ii) $2^{2x-2}36 - 2^{2x+1} = 7^{2x}2$;

(iii) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$.

(Soluzioni. (i) $x = 13/2$; (ii) $x = 1/2$; (iii) $x = 0$)

Esercizio 4. Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche:

(i) $\log x = -1$;

(ii) $\log_2(x+1) = 3$;

(iii) $\log_2(x^2-1) - \log_2(x+1) = 0$;

(iv) $\log^3_{\frac{1}{2}}(x-1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 0$.

(Soluzioni. (i) $x = e^{-1}$; (ii) $x = 7$; (iii) $x = 2$; (iv) $x = 2$, $x = 3/2$, $x = 3$)

Esercizio 5. Risolvere le seguenti equazioni esponenziali e logaritmiche:

(i) $5^{2x} - 5^x = 6$;

(ii) $2\log x = 1 + \log(x+3)$;

(iii) $\dfrac{\log(x^2+3x+2)}{\log(x+1)} = 1$;

(iv) $e^{x^2+2x} = -1$;

(v) $\dfrac{1}{\log x} = -1$;

(vi) $\log_{\frac{1}{7}} x = \sqrt{2}$;

(vii) $8^{x+1} = 2^{x^2}$.

(Soluzioni. (i) $x = \log_5 3$; (ii) $x = \frac{e \pm \sqrt{e^2 - 12e}}{2}$; (iii) impossibile; (iv) impossibile; (v) $x = e^{-1}$; (vi) $x = (1/7)^{\sqrt{2}}$; (vii) $x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$)

Esercizio 6. Una popolazione di batteri, inizialmente di N_0 indvidui in assenza di nutrimento tende all'estinzione secondo la legge esponenziale

$$N(t) = N_0 e^{-0.02t}.$$

Dopo quanto tempo essa sarà dimezzata? Il risultato dipende da N_0?
(Soluzione. $t = 50 \log 2$, il risultato non dipende da N_0.)