D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello di Ing. Informatica del 11.1.2018: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di maggiorante di un insieme $A \subset \mathbb{R}$.

(ii) Dare la definizione di estremo superiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$.

Risposta

(i) ______

(ii) ______

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema del Confronto per le successioni numeriche

(ii) Provare attraverso il Teorema dei Confronto che $\{n^2 + \cos(e^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ diverge

Risoluzione

(i) ______

(ii)

$$n^2 - 1 \leq n^2 + \cos(e^n) \leq n^2 + 1$$

e quindi per il teorema del confronto

$$\lim_{n \to \infty} n^2 + \cos(e^n) = +\infty$$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é una funzione continua tale che $\int_0^1 f(x)dx = 0$, allora

- [a] f é identicamente nulla in $[0, 1]$;
- [b] $f(0) \cdot f(1) < 0$
- [c] Se $F(x)$ é una primitiva di f, allora $F'(1) = 0$
- [X] Esiste $c \in (0, 1)$ tale che $f(c) = 0$.

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

Dal teorema della media, $\exists c \in (0,1)$ t.c.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = f(c)(1-0)$$

e quindi $\exists c \in (0,1)$ t.c. $f(c) = 0$

Esercizio 2

[4 punti]

Sia $\sum_n a_n$ una serie a termini positivi convergente e sia $b_n \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $\sum_n b_n$

- [a] é convergente, ma non assolutamente convergente
- [b] é assolutamente convergente, ma non convergente
- [c] é divergente a $-\infty$
- [X] non diverge a $+\infty$

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

Infatti poiché $b_n \leq a_n$, allora $\sum_{K=0}^{n} b_K \leq \sum_{K=0}^{n} a_K$, quindi per il confronto

$$\sum_{K=0}^{+\infty} b_n = +\infty \text{ implica } \sum_{K=0}^{+\infty} a_n = +\infty$$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (x_0, y_0) é interno ad A. Se f é derivabile in (x_0, y_0) allora

- [a] f é continua in (x_0, y_0)
- [b] f é differenziabile in (x_0, y_0)
- [c] $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = Df(x_0, y_0) \cdot v$ per ogni versore $v \in \mathbb{R}^2$
- [X] nessuna delle precedenti

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

a) No, $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$ è deriv., ma non continua

b) No, $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$ è deriv., ma non differenz.

c) No, perché $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, allora $Df(0,0) = (0,0)$, ma per $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ non esiste

Esercizio 4

[4 punti]

Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax - \ln(1+ax)}{x^2} = \frac{25}{2}.$$

Risoluzione

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$

$\ln(1+ax) = ax - \frac{a^2x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$ $(a \neq 0)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax - \ln(1+ax)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{a^2x^2}{2}}{x^2} = \frac{a^2}{2}$$

da cui

$$\frac{a^2}{2} = \frac{25}{2} \iff a = \pm 5$$

Esercizio 5

[4 punti]

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1+e^{2t})y'(t) - e^{2t}y(t)^2 = 0 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

$$\begin{cases} y' = \frac{e^{2t}}{1+e^{2t}} y^2(t) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

(eq. a variabili separabili $h(t) = \frac{e^{2t}}{1+e^{2t}}$, $g(y) = y^2$)

Sol. stazionarie: $g(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 = 0 \iff \alpha = 0$

$(\alpha \neq 0)$ Separazioni variabili $\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{r^2}\,dr = \int_0^t \frac{e^{2r}}{1+e^{2r}}\,dr \iff$

$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2}\left[\ln(e^{2t}+1) - \ln(2)\right] \iff$$

$$y(t) = \frac{2\alpha}{\alpha \ln(2) + 2 - \alpha \ln(e^{2t}+1)}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = |x + 12|e^{1/x}$ e tracciarne un grafico qualitativo.

Risoluzione

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Segno di f: $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f(x) = 0 \iff x = -12$

Limiti: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

Derivata: f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, -12\}$

$$f(x) = \begin{cases} (x+12)\, e^{\frac{1}{x}} & x \geq -12 \\ -(x+12)\, e^{\frac{1}{x}} & x < -12 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}} & x \geq -12 \\ -\dfrac{x^2 - x - 12}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}} & x < -12 \end{cases}$$

$\lim_{x \to -12^+} f'(x) \neq \lim_{x \to -12^-} f(x)$ (Punto angoloso)

$f'(x) \geq 0 \iff x \in (-12, -3) \cup (4, +\infty)$

$f'(x) \leq 0 \iff x \in (-\infty, -12) \cup (-3, 0) \cup (0, 4)$

Punti critici: $x = -3$, $x = 4$