D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 8.2.2019: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di punto di massimo locale per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Enunciare il Teorema di Fermat per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Risposta

(i) ____

(ii) ____

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.*

(ii) Se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é una funzione limitata, allora é integrabile?

Risoluzione

(i) ____

(ii) ____

Esercizio 1 **[3 punti]**

Sia $\{a_n\}_n$ una successione tale che $\sqrt{|a_n|} \sim e^{-n}$ per $n \to \infty$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- [X] converge assolutamente;
- [b] diverge;
- [c] é irregolare;
- [d] converge, ma non converge assolutamente.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $\sqrt{|a_n|} \sim e^{-n} \Rightarrow |a_n| \sim (e^{-n})^2 = (e^{-2})^n$ e la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-2})^n$ è una serie geometrica convergente

Esercizio 2 **[3 punti]**

L'integrale $\int_0^2 e^{2x}(2x+3)dx$ vale

- [a] $e^4 - 3$;
- [b] $e^4 + 1$;
- [c] $5e^4 + 1$;
- [X] $3e^4 - 1$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\int_0^2 e^{2x}(2x+3)\,dx = e^{2x}(x+1)\Big|_0^2 =$$

Esercizio 3 **[3 punti]**

La funzione $y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$ é l'integrale generale dell'equazione

- [a] $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$
- [X] $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 0$
- [c] $y''(t) - 6y'(t) + 5y(t) = 0$
- [d] $y''(t) + 6y'(t) - 5y(t) = 0$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, sono radici del polinomio caratteristico, $(\lambda-2)(\lambda-3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ è il polinomio caratteristico, quindi l'equazione diff. ordinaria è

$$y'' - 5y' + 6y$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

Risoluzione

Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)}{(n+2)!}}{\frac{n}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)\cancel{(n+1)!}} \frac{\cancel{(n+1)!}}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n(n+2)} = 0$$, quindi la serie converge

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^3(e^x - \cos(x))}$$

Risoluzione

$$e^x - \cos(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots\right) = x + \Theta(x),$$

quindi $x^3(e^x - \cos(x)) \sim x^4$

$$x^2 - \sin^2(x) = x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \Theta(x^4)\right)^2 = \frac{2}{6}x^4 + \Theta(x^4) \sim \frac{1}{3}x^4$$

da cui

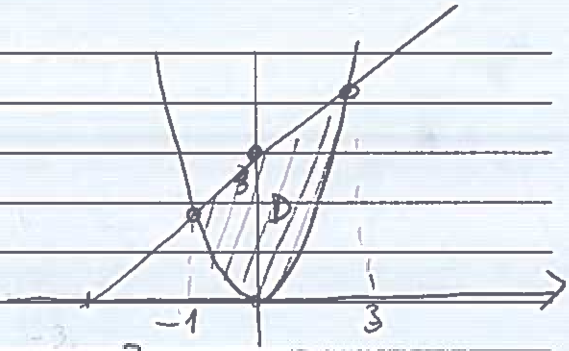
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^3(e^x - \cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^4}{x^4} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Calcolare $\iint_D xy\,dxdy$ ove D é la region piana compresa tra la parabola $y = x^2$ e la retta $y = 2x + 3$.

Risoluzione



$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x+3 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$D = \{(x,y) : x \in [-1,3];\ x^2 \leq y \leq 2x+3\}$$

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_{-1}^{3} \int_{x^2}^{2x+3} xy\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{3} \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{x^2}^{2x+3} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} \left(x(2x+3)^2 - x^5\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} \left[x(4x^2+12x+9) - x^5\right] dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} \left(4x^3 + 12x^2 + 9x - x^5\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^4 + 4x^3 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{x^6}{6}\right]_{-1}^{3} = \frac{160}{3}$$