Appello del 11.9.2012: Compito A

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione e fare un esempio di funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monotona crescente.

(ii) Enunciare il teorema sul test di monotonia.

Risposta

(i) ______________________________

____

____

____

(ii) ______________________________

____

____

____

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di matrice Hessiana per una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(ii) Enunciare il teorema sulle condizioni sufficienti per l'esistenza degli estremi locali di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Risoluzione

(i) ______________________________

____

____

____

____

(ii) ______________________________

____

____

____

____

____

____

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) \cdot f(b) > 0$. Allora

- [a] f é costante
- [b] $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$
- [c] l'insieme $\{e^{f(x)} : x \in [a,b]\}$ ammette minimo;
- [d] non esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = 0$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti la funzione $e^{f(x)}$ è continua sull'insieme $[a,b]$, chiuso e limitato.

Esercizio 2

[3 punti]

Siano f, g due funzioni tali che il loro prodotto $f \cdot g$ é derivabile in $x = 0$. Allora

- [a] f e g sono derivabili in $x = 0$
- [b] f e g sono continue in $x = 0$
- [c] Nessuna delle risposte precedenti é vera
- [d] Esiste finito $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x) - f(0)g(0)}{x}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Per definizione di derivabilità di di $f \cdot g$ in $x = 0$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to R$ una funzione differenziabile in (x_0, y_0). Indicare quale tra le seguenti affermazioni é *falsa*

- [a] f é continua in (x_0, y_0)
- [b] esistono le derivate parziali di f in (x_0, y_0)
- [c] esiste il piano tangente al grafico di f in (x_0, y_0)
- [d] $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti f differenziabile non implica l'esistenza delle derivate seconde

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} (2x)^{\sin(x)}$$

Risoluzione

$$\lim_{x\to 0^+} (2x)^{\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin(x)[\ln(2)+\ln(x)]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\cdot[\underbrace{x\ln(2)}_{\to 0}+\underbrace{x\ln(x)}_{\to 0}]} = e^0 = 1$$

Esercizio 5

[5 punti]

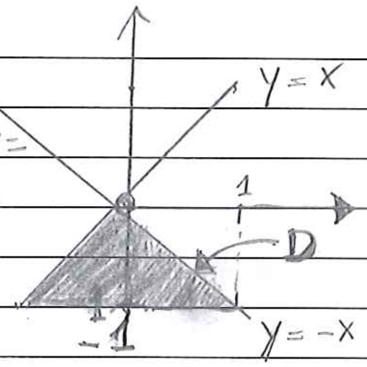
Calcolare $\iint_D x^2 e^{(y^2)}\,dx\,dy$ ove $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ -1\le y\le 0,\ y\le x\le -y\}$ (disegnare il dominio).

Risoluzione

$$\iint_D x^2 e^{y^2}\,dxdy = \int_{-1}^{0} e^{y^2}\int_{y}^{-y} x^2\,dxdy =$$

$$= \int_{-1}^{0} e^{y^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_y^{-y} dy =$$

$$= -\int_{-1}^{0} 2e^{y^2}\frac{y^3}{3}\,dy = -\frac{1}{3}\left[e^{y^2}(y^2-1)\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{3}$$



Esercizio 6

[5 punti]

Risolvere

$$\begin{cases} y'(t) + \frac{y(t)}{t} = 2e^t \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

e calcolare $\lim_{t \to 0^+} ty(t)$.

Risoluzione

Applicando la formula di risoluzione per le equazioni differenziali lineari del 1° ordine

$$y(t) = C\, e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int f(t)\, e^{A(t)}\, dt$$

ove $A(t) = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t|$ e $f(t) = 2e^t$

si ottiene

$$y(t) = 2\,\frac{e^t(t-1)}{t} + \frac{C}{t}$$

Imponendo la condizione iniziale si ha

$$y(t) = \frac{2}{t}\left(e^t(t-1) - e^2 + 1\right)$$

da cui

$$\lim_{t \to 0^+} ty(t) = 2(-1 - e^2 + 1) = -2e^2$$