Appello del 2.7.2012: Compito A

Nome: Cognome: Matricola:

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+1+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivate parziali di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nel punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Calcolare le derivate parziali di $f(x, y) = e^{x^2 y}$ in $(1, 1)$

(iii) Fare un esempio di una funzione f continua, ma non derivabile in $(0, 0)$.

Risposta

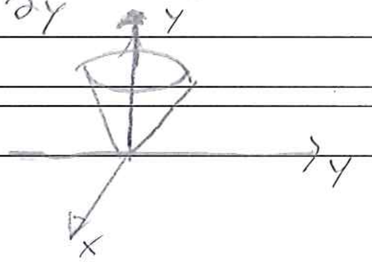
(i)

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^2 y} \cdot 2xy$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x^2 y} \cdot x^2$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2e$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = e$

(iii)

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$



Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Sotto quali condizioni una funzione $f : I \to J$, ove $I, J \subset \mathbb{R}$, é invertibile?

(ii) Enunciare il teorema sulla derivata della funziona inversa

Risoluzione

(i)

(ii)

Esercizio 1 [3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata e $m = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Allora

- [a] $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = m$
- [b] $a_n > m$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- [c] ☒ $\forall\epsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n - \epsilon < m$;
- [d] se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = m$, allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente

Risoluzione (giustificare la risposta)

Per def. di estremo inferiore di un insieme

Esercizio 2 [3 punti]

$(1/i)^{25} =$

- [a] i
- [b] ☒ $-i$
- [c] 1
- [d] -1

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\left(\frac{1}{i}\right)^{25} = (-i)^{25} = (-1)^{25} \cdot i^{25} = -(i)^{24} \cdot i =$

$= -(i^2)^{12} \cdot i = -(-1)^{12} \cdot i = -i$

Esercizio 3 [3 punti]

Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $(0,0)$ un punto critico per f. Allora

- [a] $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0$
- [b] ☒ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$ per ogni versore $v \in \mathbb{R}^2$
- [c] $\det(Hf(0,0)) \neq 0$
- [d] $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) > 0$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal teo. del gradiente e poichè $Df(0,0) = (0,0)$ (Punto critico)

$\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = Df(0,0) \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = 0$

A

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{e^{x^2} - e^{x^3}}$$

Risoluzione

$e^{x^2} - e^{x^3} = e^{x^3}\left(e^{x^2-x^3} - 1\right) \sim x^2 - x^3 \sim x^2$

$e^x - \cos(x) - \sin(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - 1 + \frac{x^2}{2!} - x + o(x^2) =$

$= x^2 + o(x^2) \sim x^2$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{e^{x^2} - e^{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare

$$\int_1^{e^7} \frac{1}{x\sqrt{9+\ln(x)}}\,dx$$

Risoluzione

$t = \ln(x) \Rightarrow dt = \frac{1}{x}\,dx$

$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = e^7 \Rightarrow t = 7 \end{cases}$

$\int_1^{e^7} \frac{1}{x\sqrt{9+\ln(x)}}\,dx = \int_0^7 \frac{dt}{\sqrt{9+t}} = \left[2\sqrt{9+t}\right]_0^7$

$= 2\cdot\sqrt{16} - 2\sqrt{9} = 2$

A

Esercizio 6

[5 punti]

Trovare i punti critici di $f(x, y) = x - x^3 - xy^2$ e classificarli

Risoluzione

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$\boxed{\text{Punti critici}}$

$Df(x,y) = (1-3x^2-y^2, -2xy) = (0,0)$

$$\begin{cases} y^2+3x^2=1 \\ 2xy=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow P_{1,2}=(0,\pm 1)$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x^2=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow P_{3,4}=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

$\boxed{\text{Studio dei punti critici}}$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & -2y \\ -2y & -2x \end{bmatrix}$$

$$Hf(P_1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det Hf(P_1) = -4 \\ \text{Punto di sella} \end{cases}$$

$$Hf(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det Hf(P_2) = -4 \\ \text{Punto di sella} \end{cases}$$

$$Hf(P_3) = \begin{bmatrix} -\frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det Hf(P_3) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{6}{\sqrt{3}}\right) > 0 \\ f_{xx} = \frac{6}{\sqrt{3}} < 0 \\ P_3 \text{ punto di max loc} \end{cases}$$

$$Hf(P_4) = \begin{bmatrix} +\frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det Hf(P_4) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right) > 0 \\ f_{xx} = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0 \\ P_4 \text{ punto di mini. loc.} \end{cases}$$