Appello del 5.7.2012: Compito B

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: Cognome: Matricola:

Domanda 1

[2+2+1 punti]

Dato un insieme $D \subset \mathbb{R}$, non vuoto,

(i) Dare la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

(ii) Dare la definizione di continuità di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$

(iii) Fare un esempio di funzione discontinua in $x_0 = -1$.

Risposta

(i) ____________________

(ii) ____________________

(iii) ____________________

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di funzione integrale

(ii) Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Risoluzione

(i) ____________________

(ii) ____________________

Esercizio 1

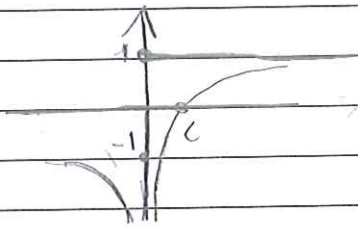
[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(0) = 1$, $f(x) = sgn(x) - \frac{1}{|x|}$ se $x \neq 0$. Allora

- [a] f é positiva in $\mathbb{R}$
- [b] f é limitata in $\mathbb{R}$
- [c] ☒ esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c. $f(c) = 0$;
- [d] f é pari

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ -1 + \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$



Esercizio 2

[3 punti]

Tra gli infiniti (per $x \to +\infty$) $f(x) = e^x x^6$, $g(x) = \frac{e^{3x}}{4x}$, $h(x) = e^{\sqrt{x}} x^2$, quelli di ordine superiore e inferiore sono

- [a] f, h
- [b] ☒ g, h
- [c] g, f
- [d] h, f

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{4x^7} = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-\sqrt{x}}}{x^4} = +\infty$$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regolare tale che $f'(x) + 1 + (f(x))^2 = 0$ per $x \in (-1, 1)$. Allora f ha in $x = 0$ un punto di

- [a] crescenza stretta
- [b] ☒ decrescenza stretta
- [c] massimo relativo
- [d] minimo relativo

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti $f'(x) = -1 - (f(x))^2$ quindi $f'(x) < 0$ per $x \in (-1, 1)$

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(t) = 6t^2(1 - e^{-7y}) \\ y(0) = \ln(8) \end{cases}$$

Risoluzione

Eq a variabili separabili: $f(t) = 6t^2$, $g(y) = 1 - e^{-7y}$

$g(\ln(8)) = 1 - e^{7\ln(8)} \neq 0$, quindi no sol. stazionaria

$$\int_{\ln(8)}^{y(t)} \frac{dr}{1-e^{-7r}} = \int_0^t 6r^2\,dr \iff \frac{1}{7}\ln\left|1-e^{7r}\right|\Big|_{\ln(8)}^{y(t)} = \frac{6}{3}r^3\Big|_0^t$$

$$\int \frac{dr}{1-e^{-7r}} = +\frac{1}{7}\int \frac{1}{(t-1)t}\,dt = \frac{1}{7}\int \frac{1}{t-1}\,dt - \int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|$$

$\hookrightarrow t = e^{-7r}$

$dt = -7e^{-7r}dr = -7t\,dr$

$$= \frac{1}{7}\ln\left|\frac{e^{-7r}-1}{e^{-7r}}\right| = \frac{1}{7}\ln\left|1-e^{7r}\right|$$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sinh(x))^2 - (\sin(x))^2}{e^{x^4} - 1}$$

Risoluzione

$e^{x^4} - 1 \sim x^4$ per $x \to 0$

$$(\sinh(x))^2 = \left(x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2 = x^2 + \frac{2x^4}{6} + o(x^4)$$

$$(\sin(x))^2 = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{2x^4}{6} + o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sinh(x))^2 - \sin(x)^2}{e^{x^4}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^4}{x^4} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = -\ln(x+4) + x|x|$$

Risoluzione

$D_f = (-4, +\infty)$

$\lim_{x\to -4^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $f(0) = -\ln(4)$

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(x+4) - x^2 & x \in (-4, 0) \\ -\ln(x+4) + x^2 & x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x+4} - 2x = -\frac{2x^2+8x+1}{x+4} & x \in (-4, 0) \\ -\frac{1}{x+4} + 2x = +\frac{2x^2+8x-1}{x+4} & x \in (0, +\infty \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{1}{4}$ (f derivabile in 0)

$f'(x) < 0$ se $x \in \left(-4, \frac{-4-\sqrt{14}}{2}\right)$ e $\left(\frac{-4+\sqrt{14}}{2}, \frac{-4+\sqrt{18}}{2}\right)$

$f'(x) > 0$ se $x \in \left(\frac{-4+\sqrt{14}}{2}, \frac{-4+\sqrt{14}}{2}\right)$ e $\left(\frac{-4+\sqrt{18}}{2}, +\infty\right)$