D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 10.1.2019: Compito B (2 turno)

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

(ii) Descrivere il comportamento di $\lim_{x\to -\infty} a^x$, al variare di $a \in (0,\infty)$.

Risposta

(i)

(ii)

$$\lim_{x\to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ +\infty & \text{se } a\in(0,1) \end{cases}$$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Data $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dare la definizione di differenziabilità in $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

(ii) Scrivere l'equazione del piano tangente a $f(x,y) = xy^2+3$ nel punto $(0,1)$.

Risoluzione

(i)

(ii)

$f(0,1)=3$ $\quad Df(x,y) = (y^2, 2xy) \Rightarrow Df(0,1) = (1,0)$

Eq piano tangente

$$y = f(0,1) + Df(0,1)\cdot(x-0, y-1) =$$

$$= 3 + x$$

Esercizio 1

[3 punti]

La funzione $f(x) = \sqrt[5]{x} \cdot (1 - e^{-x})$ é

- [x] a derivabile in $\mathbb{R}$
- [ ] b dispari
- [ ] c limitata
- [ ] d non derivabile in 0

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[5]{h}(1 - e^{-h})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[5]{h}(h + O(h^2))}{h} =$

$= 0$, quindi f è derivabile in $\mathbb{R}$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_n$ una successione e $s_0 = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Allora

- [ ] a Se $s_0 > -\infty$, $\{a_n\}_n$ converge
- [ ] b $a_n > s_0$ definitivamente
- [ ] c Se $\{a_n\}_n$ converge, allora $\lim_{n \to \infty} a_n = s_0$
- [x] d $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n - \varepsilon < s_0$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Per definizione di estremo inferiore, $\forall \varepsilon > 0$, $s_0 + \varepsilon$ non è minorante

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é suriettiva, allora f é

- [x] a non limitata
- [ ] b strettamente monotona
- [ ] c continua
- [ ] d pari

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè f è suriettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, allora necessariamente f non è limitata nè superiormente nè inferiormente

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 9y(t) = 3e^{3t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Risoluzione

- Eq. omogenea: $y'' - 9y = 0$
  Polinomio caratteristico $\lambda^2 - 9 = 0 \iff \lambda = \pm 3$
  Integrale generale eq. omogenea:
  $$y_0(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$$
- Metodo di somiglianza $f(t) = 3e^{3t} \Rightarrow \bar{y}(t) = Cte^{3t}$
  sostituendo
  $$9Cte^{3t} + 6Ce^{3t} - 9Ce^{3t} = 3e^{3t} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$
  Integrale generale eq. non omogenea
  $$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} t e^{3t}$$
- Dato iniziale: $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$
  $y'(0) = 1 \Rightarrow 3C_1 - 3C_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$
  $$C_1 = \frac{1}{12}, \quad C_2 = -\frac{1}{12}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$$

Risoluzione

$t = x^2$

Risolviamo $\int x^3 e^{-x^2} dx \stackrel{1}{=} \frac{1}{2} \int t e^{-t} dt = \dots = \frac{1}{2} e^{-x^2}(x^2+1) + c$

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{c \to +\infty} \left[\frac{1}{2} e^{-c^2}(c^2+1) - \frac{1}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}$$

Esercizio 6 **[5 punti]**

Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ e classificarli.

Risoluzione

$$Df(x,y) = (3x^2+y,\ 3y^2+x)$$

$$\begin{cases} 3x^2+y=0 & \iff \quad y = -3x^2 \\ 3y^2+x=0 & \iff \quad 27x^4+x=0 \iff x(27x^3+1)=0 \end{cases}$$

$$\iff x=0,\ x=-\frac{1}{3}$$

Punti critici $(0,0)$, $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{bmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ Punto di sella

$$Hf\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ Punto di massimo locale