D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 10.1.2019: Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dare la definizione di $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(ii) Descrivere il comportamento di $\lim_{n\to\infty} n^\alpha$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i)

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha>0 \\ 1 & \alpha=0 \\ 0 & \alpha<0 \end{cases}$$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Data $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dare la definizione di derivabilità parziale di f rispetto y in $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

(ii) Se possibile, fare un esempio di una funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ derivabile, ma non continua.

Risoluzione

(i)

(ii)

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $D = (a, b) \cup (c, d)$, $f : D \to \mathbb{R}$ derivabile e $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in D$. Allora

[a] $f(x)$ é crescente in D

[b] $f(b) \leq f(c)$

[c] Se $f(b) < 0$ e $f(c) > 0$, esiste $x \in D$ tale che $f(x) = 0$

[X] esiste $\lim_{x \to b^-} f(x)$

Risoluzione (giustificare la risposta)

[d] Per la monotonia di f in (a,b), esiste $\lim_{x \to b^-} f(x) =$

$= \sup\{f(x) : x \in (a,b)\}$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n$

[a] diverge

[X] converge assolutamente

[c] oscilla

[d] converge semplicemente ma non assolutamente

Risoluzione (giustificare la risposta)

[b] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left|(-1)^n \left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3-\frac{1}{n}}{7+\frac{4}{n}}\right)^n$, $\left(\frac{3-\frac{1}{n}}{7+4/n}\right)^n \sim \left(\frac{3}{7}\right)^n$

e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n$ è una serie geometrica convergente

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^\alpha})$ é integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$ se

[X] $\alpha > 3$

[b] $\alpha > 0$

[c] $\alpha > 2$

[d] nessun α

Risoluzione (giustificare la risposta)

Per $x \to +\infty$, $x^2 \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \sim x^{2-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-2}}$ e

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-2}}\,dx < +\infty \iff \alpha - 2 > 1 \iff \alpha > 3$

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = t^2\,(y(t)^2 - 4) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

Eq. a variabili separabili $y'(t) = g(y(t))\,f(t)$ con $g(y) = y^2 - 4$ e $f(t) = t^2$

1) Sol. stazionarie: $g(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 - 4 = 0 \iff \alpha = \pm 2$
quindi per $\alpha = \pm 2$, si hanno sol. stazionarie

2) Per $\alpha \neq \pm 2$, $\displaystyle\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{r^2-4}\,dr = \int_0^t r^2\,dr$

$$\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{r^2-4} = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{2-r}{2+r}\right|\right]_\alpha^{y(t)} = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{2-y(t)}{2+y(t)}\right| - \ln\left|\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\right|\right]$$

$\displaystyle\int_0^t r^2\,dr = \frac{t^3}{3}$ da cui

$$\boxed{\ln\left|\frac{2-y(t)}{2+y(t)}\right| = \frac{4t^3}{3} + \ln\left|\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\right|}$$

Esercizio 5

[4 punti]

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x \cdot \sin(3x) - 6\ln(1+x^2)}{x^4}$$

Risoluzione

Al 4° ordine $\quad 2x\sin(3x) = 2x\left(3x - \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3)\right) = 6x^2 - 9x^4 + o(x^4)$

$6\ln(1+x^2) = 6\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = 6x^2 - 3x^4 + o(x^4)$

$2x \cdot \sin(3x) - 6\ln(1+x^2) = (-9+3)x^4 + o(x^4) \sim -6x^4$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin(3x) - 6\ln(1+x^2)}{x^4} = -6$$

Esercizio 6 [5 punti]

Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{x+1}\ e^{-(x+1)}$$

verificando se esistono asintoti obliqui.

Risoluzione

Dominio : $[-1, +\infty)$

Segno : $f(x) \geq 0, \ \forall x \in [-1, +\infty)$

Zeri: $f(x) = 0 \iff x = -1$

Limiti : $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Derivata

$$f'(x) = e^{-(x+1)} \frac{(-1-2x)}{\sqrt{x+1}}, \quad x \in (-1, +\infty)$$

$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$

$f'(x) > 0 \iff x < -\frac{1}{2}, \quad f'(x) < 0 \iff x > -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = +\infty$$