D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 14.1.2020: Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di divergenza per una serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(ii) Quale é il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$?

Risposta

(i)

(ii) Poichè $\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, la serie a termini positivi diverge

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di derivata parziale rispetto x per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Enunciare il Teorema di Fermat per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Risoluzione

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi e divergente. Allora

[a] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n^2}$ converge;

[d] $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

[b] $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$\boxtimes$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m > n$ tale che $\sum_{n=0}^{m} a_n > \pi$;

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge, allora, per definizione,

$\lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n = +\infty$ e quindi $\sum_{n=0}^{m} a_n > \pi$ definitivamente

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e dispari. Allora

[a] f ha un estremo assoluto in 0;

[b] f é derivabile in 0 e $f'(0) = 0$;

[c] f é limitata;

$\boxtimes$ $\forall a > 0$, $\exists M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [-a, a]$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè f è continua in $\mathbb{R}$, allora, dal teo. di Weierstrass,

è limitata in ogni intervallo chiuso e limitato $[-a, a]$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f(x) = xe^{+x}$. Allora

[a] f non é limitata inferiormente

$\boxtimes$ f ha un punto di minimo relativo

[c] f ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

[d] f non ha punti di flesso

Risoluzione (giustificare la risposta)

$f'(x) = e^{x}(x+1)$, $f''(x) = e^{+x}(x+2)$

$x_0 = -1$ punto critico e $f''(-1) = e^{-1} > 0$,

quindi x_0 è un punto di minimo rel

Esercizio 4

[4 punti]

Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = te^{-y(t)} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

Eq. a variabili separabili $y'(t) = f(t)g(y(t))$ con $f(t) = t$ e $g(y) = e^{-y}$. Sono verificate le condizioni di esistenza ed unicità locale.

1) Sol. stazionarie: $g(\alpha) = e^{-\alpha} \neq 0 \ \forall \alpha$, non ci sono sol. staz.

2) Separazione variabili:

$$\int_\alpha^{y(t)} e^r dr = \int_0^t r\, dr \iff e^{y(t)} - e^\alpha = \frac{t^2}{2} \iff$$

$$y(t) = \ln\left(e^\alpha + \frac{t^2}{2}\right)$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$$

Risoluzione

Riscrivo il limite come $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

$x\ln(1+x) \sim x^2$, quindi sviluppo il numeratore al secondo ordine

$$x - \ln(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2}$$

quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = (x + y - 3)e^{xy}$ e classificarli.

Risoluzione

f è di classe C^2 in $\mathbb{R}^2$. Quindi

$$Df(x,y) = \left(e^{xy} + (x+y-3)e^{xy}\cdot y,\ e^{xy} + (x+y-3)e^{xy}\cdot x\right) = (0,0)$$

$$\iff \begin{cases} 1 + (x+y-3)y = 0 \\ 1 + (x+y-3)x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+y-3)(x-y) = 0 \\ 1 + (x+y-3)x = 0 \end{cases}$$

① $\begin{cases} x = y \\ 1 + (2x-3)x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} P_1 = (1,1) \\ P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$ PUNTI CRITICI

② $\begin{cases} x+y-3 = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$ impossibile

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} e^{xy}\left[y^2(x+y-3) + 2y\right] & e^{xy}\left[x+y + (x+y-3)(xy+1)\right] \\ e^{xy}\left[x+y + (x+y-3)(xy+1)\right] & e^{xy}\left[x^2(x+y-3) + 2x\right] \end{bmatrix}$$

$$Hf(1,1) = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}$$ Punto di minimo

$$Hf\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{2} & e^{1/4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) \\ e^{1/4}\left(-\frac{3}{2}\right) & e^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ Punto di sella