INGEGNERIA CIVILE - INGEGNERIA DEI TRASPORTI
COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 19-06-2009

ESERCIZIO 1

Calcolare l'integrale $\oint_\gamma \vec{F}\cdot\vec{v}dt$, dove $\vec{F}=(x-y, y^2-z, z-x)$ e γ è l'ellisse $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y+z=2. \end{cases}$

SOLUZIONE

Calcolo diretto. La parametrizzazione dell'ellisse è : $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \\ z=2-\sin\theta, \end{cases}$ $0\le\theta\le 2\pi$, e si ha $dx=-\sin\theta d\theta$, $dy=\cos\theta d\theta$ e $dz=-\cos\theta d\theta$. Quindi l'integrale vale:

$$\int_0^{2\pi}\big[(\cos\theta-\sin\theta)(-\sin\theta)+(\sin^2\theta-2+\sin\theta)\cos\theta+(2-\sin\theta-\cos\theta)(-\cos\theta)\big]d\theta=\int_0^{2\pi}1d\theta=2\pi.$$

Con il Teorema di Stokes. Sia Σ la superficie piana racchiusa dall'ellisse. Una sua parametrizzazione è $z=2-y$, con $(x,y)\in D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$. La normale è $\vec{n}=\frac{(0,1,1)}{\sqrt{1+1}}=(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ e l'elemento d'area $d\sigma=\sqrt{2}dxdy$. Si ha poi

$$\mathrm{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-y & y^2-z & z-x \end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\equiv(1,1,1).$$

Quindi la formula di Stokes fornisce

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot\vec{v}dt=\iint_\Sigma \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma=\iint_\Sigma\sqrt{2}d\sigma=\iint_D 2dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1 2\rho d\rho d\theta=2\pi.$$

ESERCIZIO 2

Sviluppare in serie di Fourier di soli seni nell'intervallo $[0,1]$ la funzione

$$g_1(x)=\begin{cases} 1 & \text{per } 0\le x<\frac{1}{2} \\ -2 & \text{per } \frac{1}{2}\le x\le 1. \end{cases}$$

SOLUZIONE

Si ha:

$$\begin{aligned} b_k =&2\int_0^1 g_1(x)\sin(k\pi x)dx=2\int_0^{1/2}\sin(k\pi x)dx-4\int_{1/2}^1\sin(k\pi x)dx \\ =&2\left[-\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^{1/2}-4\left[-\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_{1/2}^1 \\ =&2\frac{1-3\cos(k\pi/2)+2(-1)^k}{k\pi} \end{aligned}$$

Quindi lo sviluppo è:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{1-3\cos(k\pi/2)+2(-1)^k}{k\pi}\sin(k\pi x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq 0, 1/2, 1 \\ -1/2 & \text{per } x = 0, 1/2, 1. \end{cases}$$

La convergenza non è totale. *Osservazione*: si ha $\cos(k\pi/2) = \begin{cases} 0 & \text{per } k \text{ dispari} \\ (-1)^{k/2} & \text{per } k \text{ pari,} \end{cases}$ ma questo non porta ad una formula più compatta.

ESERCIZIO 3

Dopo aver determinato la soluzione stazionaria $u_{\mathrm{s}}(x)$, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -2 & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = 0, u(1,t) = 4 & t > 0, \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 1 & \text{per } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ x^2 + 3x - 2 & \text{per } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Dare anche una stima della convergenza di u ad u_{s}.

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Dirichlet non omogeneo per l'equazione del calore non omogenea. La soluzione stazionaria viene trovata risolvendo il problema $\begin{cases} -u_{\mathrm{s}}'' = -2, \ 0 < x < 1 \\ u_{\mathrm{s}}(0) = 0, u_{\mathrm{s}}(1) = 4. \end{cases}$ La soluzione generale è $u_{\mathrm{s}}(x) = x^2 + C_1 x + C_2$ e imponendo le condizioni al contorno si trova: $C_2 = 0$, $1 + C_1 + C_2 = 4$, da cui ricaviamo $C_1 = 3$ e $u_{\mathrm{s}}(x) = x^2 + 3x$. Ponendo $g_1(x) = g(x) - u_{\mathrm{s}}(x)$, si vede immediatamente che la funzione g_1 coincide con quella omonima dell'esercizio precedente. Inoltre, ponendo $v(x,t) = u(x,t) - u_{\mathrm{s}}(x)$, la funzione v deve risolvere il seguente problema di Dirichlet omogeneo

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 & 0 < x < 1, t > 0 \\ v(x,0) = g_1(x) & 0 < x < 1 \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Quindi, tenendo conto dello sviluppo ottenuto nell'esercizio precedente, la soluzione del presente problema è:

$$u(x,t) = u_{\mathrm{s}}(x) + v(x,t) = 3x + x^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2e^{-k^2\pi^2 t}\frac{1-3\cos(k\pi/2)+2(-1)^k}{k\pi}\sin(k\pi x).$$

Si ha poi $|u(x,t) - u_{\mathrm{s}}(x)| \leq 8e^{-\pi^2 t}$ per $t > 1$.

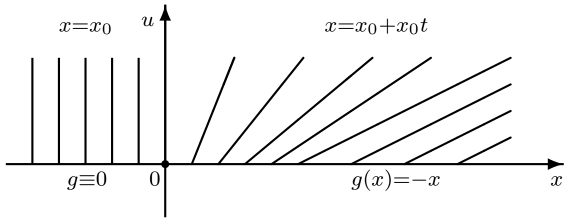
ESERCIZIO 4

Dopo aver disegnato le relative caratteristiche, risolvere il seguente problema

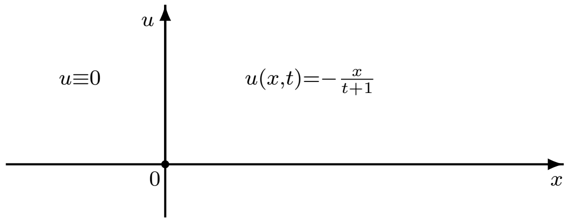
$$\begin{cases} u_t - u u_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ -x & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

SOLUZIONE

Le caratteristiche sono le rette $x = x_0$ e per $x_0 < 0$ e le rette $x = x_0 + x_0 t$ per $x_0 > 0$ (poiché $q'[g(x_0)] = -(-x_0) = x_0$ per $x_0 > 0$).



Per $x < 0$ la soluzione è $u \equiv 0$. Per $x \geq 0$ la soluzione in forma implicita è $u = -[x + ut]$, che esplicitata da $u(x,t) = -\frac{x}{t+1}$.



ESERCIZIO 5

Determinare le soluzioni del problema ai limiti $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$ della forma $u(x,t) = w(t)v(x)$. *Facoltativo*: usare i risultati ottenuti per discutere la risoluzione del seguente problema, mediante il metodo di separazione delle variabili:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = h(x) & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

SOLUZIONE

La funzione $u(x,t) = v(x)w(t)$ risolve l'equazione se e solo se $w''(t)v(x) - w(t)v''(x) + 2w'(t)v(x) = 0$, che separando le variabili diventa $\frac{w''(t)+2w'(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)}$. Ambo i membri devono essere costanti e chiamando λ tale valore costante troviamo che v deve risolvere il problema ai limiti

$$\begin{cases} v''(x) = \lambda v(x) & 0 < x < \pi \\ v(0) = v(\pi) = 0. \end{cases}$$

Come è noto, le soluzioni non nulle di questo problema sono $v_k(x) = \sin kx$, con $\lambda_k = -k^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. L'equazione corrispondente per w è $w'' + 2w' + k^2 w = 0$. La sua soluzione generale è $w_k(t) = C_{1k} e^{-t} \cos\left(t\sqrt{k^2-1}\right) + C_{2k} e^{-t} \sin\left(t\sqrt{k^2-1}\right)$ per $k \geq 2$ e $w_1(t) = C_{11} e^{-t} + tC_{21} e^{-t}$ per $k = 1$. Quindi le soluzioni del problema ai limiti a variabili separate sono

$$(C_{11} e^{-t} + tC_{21} e^{-t}) \sin x \qquad \text{e} \qquad \left[C_{1k} e^{-t} \cos\left(t\sqrt{k^2-1}\right) + C_{2k} e^{-t} \sin\left(t\sqrt{k^2-1}\right)\right] \sin kx, \quad k \geq 2.$$

Notando che

$$w_k(0) = C_{1k} \ \text{ per } k \geq 1, \qquad w_1'(0) = -C_{11} + C_{21}, \quad w_k'(0) = -C_{1k} + \sqrt{k^2-1}\, C_{2k} \ \text{ per } k \geq 2,$$

le condizioni iniziali impongono che debba essere

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{1k} \sin kx = g(x) \quad \text{e} \quad (-C_{11} + C_{21}) \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} (-C_{1k} + \sqrt{k^2-1} C_{2k}) \sin kx = h(x)$$

e quindi

$$C_{1k} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin kx dx \;\; \text{per } k \geq 1, \qquad C_{21} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [g(x) + h(x)] \sin x dx$$
$$C_{2k} = \frac{2}{\pi \sqrt{k^2-1}} \int_0^{\pi} [g(x) + h(x)] \sin kx dx \qquad \text{per } k \geq 2.$$

Osservazione: l'equazione $u_{tt} - c^2 u_{xx} + 2au_t = 0$, dove a è una costante positiva, descrive le oscillazioni di una corda tesa soggetta ad una forza d'attrito proporzionale alla velocità.