INGEGNERIA CIVILE - INGEGNERIA DEI TRASPORTI
COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 28-01-2010

ESERCIZIO 1
Calcolare l'integrale $\iint_{+\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma$, dove $\vec{F} = (x^3 - xz, 2y^3 + 2yz, z + x^2)$, $+\partial V$ è la superficie esterna del cilindro $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, -2 \leq z \leq 2\}$ ed $\vec{n}$ la normale a $+\partial V$ (orientata verso l'esterno).

SOLUZIONE
In coordinate cilindriche si ha $\mathrm{div}\vec{F} = 3x^2 + 6y^2 + z + 1 \equiv 3\rho^2 + 3\rho^2 \sin^2\theta + z + 1$ e V è descritto dalle condizioni $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 2$, $-2 \leq z \leq 2$. Applicando il Teorema della divergenza si trova quindi:

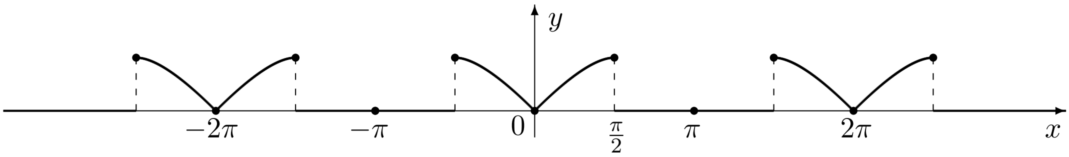
$$\begin{aligned}\iint_{+\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-2}^2 (3\rho^2 + 3\rho^2\sin^2\theta + z + 1)\rho dz d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (12\rho^3 + 12\rho^3\sin^2\theta + 4\rho)d\rho d\theta \\ &= 8\int_0^{2\pi}(7 + 6\sin^2\theta)d\theta \\ &= 160\pi.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier di soli coseni nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \end{cases}$$

esaminando la convergenza della serie ottenuta.

SOLUZIONE
La funzione è regolare a tratti ma presenta una discontinuità di prima specie nel punto $\frac{\pi}{2}$. Quindi la serie non convergerà assolutamente. Il grafico del prolungamengo periodico pari è il seguente:



I coefficienti dello sviluppo richiesto sono: $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta = \frac{2}{\pi}$,

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin x\cos x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin 2x dx = \frac{1}{\pi}[-\cos 2x]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi},$$

e poi, per $k \geq 2$,

$$\begin{aligned}
a_k =& \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos kx dx \\
=& \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\sin(k+1)x + \sin(1-k)x\right] dx \\
=& \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(k+1)x}{k+1} + \frac{\cos(k-1)x}{k-1} \right]_0^{\pi/2} \\
=& -\frac{2}{\pi(k^2-1)} - \frac{2k}{\pi(k^2-1)} \cos \frac{(k+1)\pi}{2},
\end{aligned}$$

tenendo anche conto del fatto che $\cos \frac{(k-1)\pi}{2} = -\cos \frac{(k+1)\pi}{2}$. Quindi lo sviluppo è:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \cos x + \sum_{k=2}^{\infty} \left[-\frac{2}{\pi(k^2-1)} - \frac{2k}{\pi(k^2-1)} \cos \frac{(k+1)\pi}{2} \right] \cos kx = \begin{cases} g(x) & \text{per } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1/2 & \text{per } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

La convergenza non è totale. *Osservazione 1*: si ha $\cos \frac{(k+1)\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{per } k = 4m, 4m+2 \\ 1 & \text{per } k = 4m+1 \\ -1 & \text{per } k = 4m+3, \end{cases}$
ma questo non porta ad una formula più compatta. *Osservazione 2*: l'integrale di a_k si può calcolare anche per parti. Si ha

$$\begin{aligned}
\int \sin x \cos kx dx =& -\cos x \cos kx - k \int \cos x \sin kx dx \\
=& -\cos x \cos kx - k \sin x \sin kx + k^2 \int \sin x \cos kx dx,
\end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned}
a_k =& \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos kx dx = \frac{2}{(k^2-1)\pi} \left[\cos x \cos kx + k \sin x \sin kx\right]_0^{\pi/2} \\
=& -\frac{2}{\pi(k^2-1)} + \frac{2k}{\pi(k^2-1)} \sin \frac{k\pi}{2},
\end{aligned}$$

uguale all'espressione precedente perché $\cos(k+1)\frac{\pi}{2} = -\sin k\frac{\pi}{2}$.

ESERCIZIO 3

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & 0 < x < \pi \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

dove $g(x)$ è la funzione dell'esercizio precedente. Cosa accade alla soluzione $u(x,t)$ per $t \to +\infty$?

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Neumann omogeneo per l'equazione del calore omogenea. La soluzione è

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} e^{-4t} \cos x + \sum_{k=2}^{\infty} e^{-4k^2 t} \left[-\frac{2}{\pi(k^2-1)} - \frac{2k}{\pi(k^2-1)} \cos \frac{(k+1)\pi}{2} \right] \cos kx.$$

E chiaro poi che per $t \to +\infty$ tendono a zero tutti gli esponenziali e quindi la soluzione $u(x,t)$ tende al valore stazionario $\frac{1}{\pi}$ (il ragionamento potrebbe essere reso rigoroso con le stesse argomentazioni usate nel paragrafo sulla convergenza alla distribuzione stazionaria per il problema di Cauchy-Dirichlet).

ESERCIZIO 4

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x^2 t & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \frac{x}{1+x^2} & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione delle onde. Applicando la formula di D'Alembert troviamo:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{y}{1+y^2} dy + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} y^2 s dy ds \\ =& \frac{1}{4} \left[\log(1+y^2) \right]_{y=x-t}^{y=x+t} + \frac{1}{6} \int_0^t [y^3 s]_{y=x-t+s}^{y=x+t-s} ds \\ =& \frac{1}{4} \log \left(\frac{1+x^2+t^2+2xt}{1+x^2+t^2-2xt} \right) + \frac{1}{3} \int_0^t (3x^2 st - 3x^2 s^2 + 3s^3 t + st^3 - 3t^2 s^2 - s^4) ds \\ =& \frac{1}{4} \log \left(\frac{1+x^2+t^2+2xt}{1+x^2+t^2-2xt} \right) + \frac{x^2 t^3}{6} + \frac{t^5}{60}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5

a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $u_{tt} - u_{xx} + u = 0$ che hanno la forma $u(x,t) = f(x - 2t)$, dove $f \in C^2(\mathbb{R})$ è una funzione incognita.

(b) Determinare la relazione che devono soddisfare le costanti positive k, ω, c, a affinché la funzione $u(x,t) = \cos(kx - \omega t)$ sia una soluzione dell'equazione $u_{tt} - c^2 u_{xx} + au = 0$.

SOLUZIONE

(a) Se $u(x,t) = f(x-2t)$ allora si ha $u_{xx}(x,t) = f''(x-2t)$ e $u_{tt}(x,t) = 4f''(x-2t)$ e quindi l'equazione alle derivate parziali si traduce nell'equazione ordinaria $3f'' + f = 0$, il cui integrale generale è $f(y) = C_1 \sin \frac{y}{\sqrt{3}} + C_2 \cos \frac{y}{\sqrt{3}}$. Dunque le soluzioni richieste sono

$$u(x,t) = C_1 \sin \frac{x-2t}{\sqrt{3}} + C_2 \cos \frac{x-2t}{\sqrt{3}}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Se $u(x,t) = \cos(kx - \omega t)$ allora $u_{xx}(x,t) = -k^2 \cos(kx - \omega t)$ e $u_{tt}(x,t) = -\omega^2 \cos(kx - \omega t)$ e quindi u l'equazione $u_{tt} - c^2 u_{xx} + au = 0$ si traduce in $(-\omega^2 + c^2k^2 + a) \cos(kx - \omega t) = 0$, che è verificata se e soltanto se $\omega^2 = c^2k^2 + a$ (questa condizione viene chiamata *relazione di dispersione*).