INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 18-02-2011

ESERCIZIO 1
Usando il teorema di Stokes, calcolare il seguente integrale:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{v} dt,$$

dove $\mathcal{C}$ é l'elisse $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z + x = 2 \end{cases}$ ed $\vec{F} = (y, z, x^2)$.

SOLUZIONE
Applicando il teorema di Stokes troviamo:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{+\Sigma} \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Si ha:

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x^2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-1) + \mathbf{j}(-2x) + \mathbf{k}(-1) \equiv (-1, -2x, -1).$$

Per quanto riguarda Σ, le cui equazioni parametriche sono $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 2 - x \end{cases}$, $(x, y) \in D$, dove $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, troviamo che:

$$L = \frac{\partial(y, z)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \qquad M = \frac{\partial(z, x)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad N = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

e quindi

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \qquad d\sigma = \sqrt{2} dxdy.$$

Allora $\text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} = -\sqrt{2}$ e si ha:

$$\int_{+\Sigma} \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = -2 \iint_D dxdy = -2\text{Area}(D) = -8\pi.$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier la funzione periodica di periodo 2π che in $(-\pi, \pi]$ vale:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per} \quad 0 \leq x \leq \pi \\ -\pi x & \text{per} \quad -\pi < x < 0. \end{cases}$$

SOLUZIONE
Osserviamo che la funzione f è continua: $\lim_{x \to -\pi^+} f(x) = \pi^2 = f(\pi)$ e quindi si raccorda nei punti $\pi + 2k\pi$. Allora è regolare a tratti e la convergenza sarà totale. Si ha poi:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\pi x dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{x^3}{3\pi}\right]_{0}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{3} = \frac{5}{6}\pi^2,$$

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\pi x \cos kx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos kx dx \\ =& \left[-\frac{x\sin kx}{k} - \frac{\cos kx}{k^2}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{x^2 \sin kx}{k\pi} + \frac{2x\cos kx}{k^2\pi} - \frac{2\sin kx}{k^3\pi}\right]_{0}^{\pi} \\ =& \frac{3(-1)^k - 1}{k^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\pi x \sin kx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \sin kx dx \\ =& \left[\frac{x\cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{x^2 \cos kx}{k\pi} + \frac{2x\sin kx}{k^2\pi} + \frac{2\cos kx}{k^3\pi}\right]_{0}^{\pi} \\ =& \frac{2[(-1)^k - 1]}{k^3\pi} = \begin{cases} 0 & \text{per } k \text{ pari} \\ -\frac{4}{k^3\pi} & \text{per } k \text{ dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{5\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3(-1)^k - 1}{k^2}\cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^k - 1]}{k^3\pi}\sin kx \\ \equiv& \frac{5\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3(-1)^k - 1}{k^2}\cos kx + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-4}{(2m+1)^3\pi}\sin(2m+1)x, \end{aligned}$$

con convergenza totale.

ESERCIZIO 3
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 1 < x^2 + y^2 < 4, \\ u = 2xy + 6y - 8y^3 & x^2 + y^2 = 1, \\ u = \frac{xy}{8} + 24y - 8y^3 & x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

SOLUZIONE
Si ha:

$$(2xy + 6y - 8y^3)_{\substack{x=\cos\theta \\ y=\sin\theta}} = 2\sin\theta\cos\theta + 6\sin\theta - 8\sin^3\theta = \sin 2\theta + 2\sin^3 3\theta = \sin 2\theta + 2\sin 3\theta$$

$$\left(\frac{xy}{8} + 24y - 8y^3\right)_{\substack{x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta}} = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + 48\sin\theta - 64\sin^3\theta = \frac{1}{4}\sin 2\theta + 16\sin 3\theta.$$

Quindi il problema dato in coordinate polari diventa:

$$\begin{cases} U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 0, & 1 < r < 2, 0 \le \theta \le 2\pi, \\ U(1,\theta) = \sin 2\theta + 2\sin 3\theta & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ U(2,\theta) = \frac{1}{4}\sin 2\theta + 16\sin 3\theta & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

La soluzione a quest'ultimo problema va cercata nella forma:

$$U(r,\theta) = \left(C_1 r^2 + \frac{C_2}{r^2}\right)\sin 2\theta + \left(C_3 r^3 + \frac{C_4}{r^3}\right)\sin 3\theta.$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo i due sistemi:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 4C_1 + \frac{C_2}{4} = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} C_3 + C_4 = 2 \\ 8C_3 + \frac{C_4}{8} = 16, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 2$ e $C_4 = 0$. Quindi

$$U(r,\theta) = \frac{1}{r^2}\sin 2\theta + 2r^3 \sin 3\theta = \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta + 6r^3\sin\theta - 8r^3\sin^3\theta = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + 6x^2y - 2y^3.$$

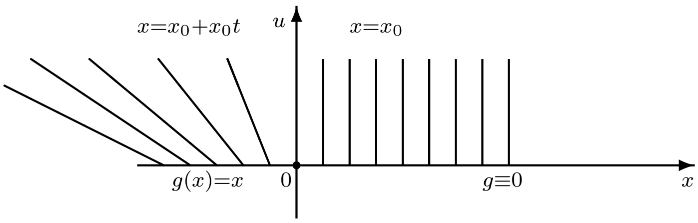
ESERCIZIO 4

Dopo aver disegnato le caratteristiche, risolvere il seguente problema:

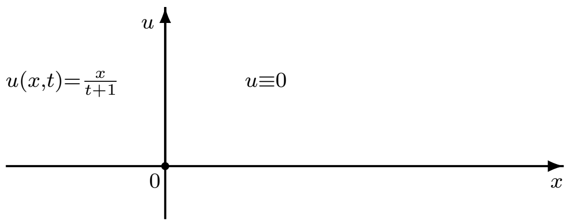
$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{per} \quad x \le 0 \\ 0 & \text{per} \quad x > 0. \end{cases}$$

SOLUZIONE

L'equazione delle caratteristiche è $x = x_0 + x_0 t$ per $x_0 \le 0$ e $x = x_0$ per $x_0 > 0$.



Per $x \le 0$ la soluzione in forma implicita è $u = [x - ut]$, che esplicitata diventa $u = \frac{x}{t+1}$. Per $x_0 > 0$ la soluzione è $u \equiv 0$.



ESERCIZIO 5

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2x + t^2 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = \sin^2 x & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \cos^2 x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

SOLUZIONE Applicando la formula di D'Alembert troviamo:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{2}[\sin^2(x+t) + \sin^2(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos^2 y dy + \frac{1}{2}\int_0^t \left[\int_{x-t+s}^{x+t-s} (2y + s^2) dy\right] ds \\ =& \frac{1 - \cos 2x \cos 2t + t}{2} + \frac{1}{4}\cos 2x \sin 2t + \frac{1}{2}\int_0^t (4xt - 4xs + 2s^2 t - 2s^3) ds \\ =& \frac{1 - \cos 2x \cos 2t + t}{2} + \frac{1}{4}\cos 2x \sin 2t + xt^2 + \frac{1}{12}t^4. \end{aligned}$$