INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
PROVA SCRITTA DEL 23-02-2012 - SOLUZIONI

ESERCIZIO 1
Calcolare

$$\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

dove V é il solido delimitato dalle superfici $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 1$ e $z = -2$ ed $\vec{F} = (4xy^2, 8x^2y, z^2)$.

SOLUZIONE
Si ha $\text{div}\vec{F} = 4y^2 + 8x^2 + 2z$. Applicando il teorema della divergenza troviamo:

$$\begin{aligned}
\iint_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_V \text{div}\vec{F} dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-2}^{1} \int_0^{2-z} (4\rho^2 \cos^2\theta + 4\rho^2 + 2z)\rho d\rho dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-2}^{1} [(2-z)^4(\cos^2\theta + 1) + z(2-z)^2] dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{5}(2-z)^5(\cos^2\theta + 1) + \left(2z^2 - \frac{4}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4\right)^2 \right]_{z=-2}^{z=1} d\theta \\
&= \frac{3}{10}\pi + 570\pi.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier di soli seni nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

esaminando la convergenza della serie ottenuta. E' richiesto anche il disegno dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE
Osserviamo preliminarmente che $f_+(0) = 1 \neq 0$ e quindi la convergenza dello sviluppo non può essere totale. Procediamo ora con il calcolo dei coefficienti. Si ha:

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \sin x dx = \frac{1}{2\pi} [-\cos 2x]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi},$$

e per $k \geq 2$,

$$
\begin{aligned}
b_k =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x \sin kx dx\\
=& \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}[\sin(k+1)x+\sin(k-1)x]dx\\
=& \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(k+1)x}{k+1}-\frac{\cos(k-1)x}{k-1}\right]_0^{\pi/2}\\
=& \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(k+1)\frac{\pi}{2}}{k+1}-\frac{\cos(k-1)\frac{\pi}{2}}{k-1}+\frac{2k}{k^2-1}\right]\\
=& \frac{2k}{\pi(k^2-1)}+\frac{2}{\pi(k^2-1)}\cos(k+1)\frac{\pi}{2} \equiv \frac{2k}{\pi(k^2-1)}-\frac{2}{\pi(k^2-1)}\sin k\frac{\pi}{2},
\end{aligned}
$$

poiché

$$
\cos(k-1)\frac{\pi}{2} = -\cos(k+1)\frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad \cos(k+1)\frac{\pi}{2} = -\sin\frac{k\pi}{2}.
$$

Si ha quindi,

$$
\frac{1}{\pi}\sin x + \sum_{k=2}^{\infty} b_k \sin kx = \begin{cases} 0 & x=0\\ \cos x & 0<x<\pi/2\\ 0 & \pi/2\le x\le\pi, \end{cases}
$$

con convergenza solo puntuale.

ESERCIZIO 3
Risolvere il seguente problema

$$
\begin{cases} u_t - x^2 u_x = 2te^{t^2} & x\in\mathbb{R}, t>0\\ u(x,0) = 1+e^{x^2} & x\in\mathbb{R}. \end{cases}
$$

Facoltativo: verificare che la funzione ottenuta sia la soluzione del problema.

SOLUZIONE
Le curve caratteristiche si ottengono risolvendo il problema:

$$
\begin{cases} x' = -x^2\\ x(0) = x_0. \end{cases}
$$

Separando le variabili si ottiene: $\int \frac{dx}{x^2} = -\int dt$, $\frac{1}{x} = t + C$, $x = \frac{1}{t+C}$. Imponendo la condizione iniziale, si trova $C = \frac{1}{x_0}$ e quindi

$$
x = \varphi(x_0,t) \equiv \frac{x_0}{x_0 t + 1}, \qquad x_0 = \psi(x,t) \equiv \frac{x}{1-xt}.
$$

Sulle caratteristiche l'equazione diventa:

$$\begin{cases} U' = 2te^{t^2} \\ U(0) = 1 + e^{x_0^2}. \end{cases}$$

La soluzione generale è: $U = e^{t^2} + C$. Imponendo la condizione iniziale si trova $C = e^{x_0^2}$ e quindi

$$u(x,t) = e^{t^2} + e^{x^2/(1-xt)^2}.$$

Verifica. Si ha $u(x,0) = 1 + e^{x^2}$ e poi

$$u_t - x^2 u_x = 2te^{t^2} + 2\frac{x^3}{(1-xt)^3}e^{x^2/(1-xt)^2} - x^2\frac{2x}{(1-xt)^2}e^{x^2/(1-xt)^2} - x^2\frac{2x^2t}{(1-xt)^3}e^{x^2/(1-xt)^2} = 2te^{t^2}.$$

ESERCIZIO 4

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 3x^2t^2 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = x^4 & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 4x^3 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Facoltativo: verificare che la funzione ottenuta sia la soluzione del problema.

SOLUZIONE Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione 1. Applicando la formula di D'Alembert troviamo:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{2}[(x+t)^4 + (x-t)^4] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 4y^3 + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} 3y^2s^2\,dyds \\ =& (x+t)^4 + \frac{1}{2}\int_0^t s^2\{[x+(t-s)]^3 - [x-(t-s)]^3\}ds \\ =& (x+t)^4 + \int_0^t [3x^2s^2(t-s) + s^2(t-s)^3]ds \\ =& (x+t)^4 + \left[x^2s^3t - \frac{3}{4}x^2s^4 + \frac{1}{3}s^3t^3 - \frac{3}{4}s^4t^2 + \frac{3}{5}s^5t - \frac{1}{6}s^6\right]_{s=0}^{s=t} \\ =& (x+t)^4 + \frac{1}{4}x^2t^4 + \frac{1}{60}t^6. \end{aligned}$$

Verifica. Si ha: $u(x,0) = x^4$, $u_t(x,t) = 4(x+t)^3 + x^2t^3 + \frac{1}{10}t^5$ e quindi $u_t(x,0) = 4x^3$. Infine:

$$u_{tt} - u_{xx} = \left[12(x+t)^2 + 3x^2t^2 + \frac{1}{2}t^4\right] - \left[12(x+t)^2 + \frac{1}{2}t^4\right] = 3x^2t^2.$$

ESERCIZIO 5

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 1 < x^2 + y^2 < 4, \\ u = 2xy + 2x^2 - 1 & x^2 + y^2 = 1, \\ u = 2xy + \frac{2-y^2}{8} & x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Facoltativo: verificare che la funzione ottenuta sia la soluzione del problema.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in un anello. Si ha:

$$\begin{aligned} [2xy + 2x^2 - 1]_{x=\cos\theta, y=\sin\theta} &= \sin 2\theta + \cos 2\theta \\ \left[2xy + \frac{2-y^2}{8}\right]_{x=2\cos\theta, y=2\sin\theta} &= 4\sin 2\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta. \end{aligned}$$

Quindi in coordinate polari il problema diventa:

$$\begin{cases} U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 0 & 1 < r < 2, 0 \le \theta \le 2\pi, \\ U(1,\theta) = \sin 2\theta + \cos 2\theta & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ U(2,\theta) = 4\sin 2\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

Cercando la soluzione nella forma

$$U(r,\theta) = \left(C_1 r^2 + C_2 \frac{1}{r^2}\right)\sin 2\theta + \left(C_3 r^2 + C_4 \frac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

troviamo che deve essere

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 4C_1 + \frac{1}{4}C_2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_3 + C_4 = 1 \\ 4C_3 + \frac{1}{4}C_4 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

e quindi $C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = 0, C_4 = 1$. In conclusione,

$$U(r,\theta) = r^2 \sin 2\theta + \frac{1}{r^2}\cos 2\theta$$

e tornando in coordinate cartesiane

$$r^2 \sin 2\theta + \frac{1}{r^2}\cos 2\theta = 2xy + \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^4} = 2xy + \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = u(x,y).$$

<u>Verifica</u>. Si ha:

$$\left[2xy + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]_{x^2+y^2=1} = 2xy + 2x^2 - 1, \qquad \left[2xy + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]_{x^2+y^2=4} = 2xy + \frac{2-y^2}{8}$$

e poi

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{6x^4 + 6y^4 - 36x^2y^2}{(x^2+y^2)^4} - \frac{6x^4 + 6y^4 - 36x^2y^2}{(x^2+y^2)^4} = 0.$$