INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
PROVA SCRITTA DEL 30-06-2011 - SOLUZIONI

ESERCIZIO 1
Calcolare l'integrale $\iiint_V 4z(x^2+y^2)dxdydz$, dove V è il volume racchiuso dal piano $z=0$ e dai coni $z = 1-\sqrt{x^2+y^2}$, $z = 1-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$.

SOLUZIONE
V è la regione di spazio compresa tra due coni circolari retti che hanno lo stesso vertice $(0,0,1)$, come asse l'asse z e che poggiano sul piano x,y. In coordinate cilindriche è descritta dalle condizioni

$$\begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1-z \le \rho \le 2(1-z). \end{cases}$$

Quindi si ha:

$$\begin{aligned}\iiint_V dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-z}^{2(1-z)} 4z\rho^2\cdot\rho d\rho dz d\theta = 2\pi\int_0^1 [z\rho^4]_{\rho=1-z}^{\rho=2(1-z)}dz \\ &= 30\pi\int_0^1 (z-4z^2+6z^3-4z^4+z^5)z = 30\pi\left[\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\right] = \pi.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier di soli coseni nell'intervallo $[0,\pi]$ la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}-x & 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < x \le \frac{3}{4}\pi \\ x-\frac{3}{4}\pi & \frac{3}{4}\pi \le x \le \pi. \end{cases}$$

esaminando la convergenza della serie ottenuta.

SOLUZIONE
Osserviamo preliminarmente che g è continua e regolare a tratti e quindi la convergenza sarà totale. Procediamo ora con il calcolo dei coefficienti:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x) = \frac{\pi}{8},$$

e per $k \ge 1$,

$$
\begin{aligned}
a_k =& \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos kx dx + \int_{\frac{3}{4}}^{\pi}\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)\cos kx dx\\
=& \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}\frac{\sin kx}{k} - x\frac{\sin kx}{k} - \frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{\pi/4} + \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} - \frac{3\pi}{4}\frac{\sin kx}{k}\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\\
=& \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos\frac{k\pi}{4}}{k^2} + \frac{1}{k^2}\right] + \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{\cos\frac{3k\pi}{4}}{k^2}\right] = \frac{2(1-\cos\frac{k\pi}{4} - \cos\frac{3k\pi}{4} + (-1)^k)}{k^2\pi}.
\end{aligned}
$$

Si ha quindi:

$$
\frac{\pi}{16} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(1-\cos\frac{k\pi}{4} - \cos\frac{3k\pi}{4} + (-1)^k)}{k^2\pi}\cos kx = g(x),
$$

con convergenza puntuale.

ESERCIZIO 3
Risolvere il seguente problema:

$$
\begin{cases}
u_t - 5u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0,\\
u(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq \pi,\\
u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t > 0,
\end{cases}
$$

dove $g(x)$ è la funzione dell'esercizio precedente.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy - Neumann per l'equazione del calore. La soluzione è:

$$
u(x,t) = \frac{\pi}{16} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(1-\cos\frac{k\pi}{4} - \cos\frac{3k\pi}{4} + (-1)^k)}{k^2\pi}e^{-5k^2t}\cos kx.
$$

ESERCIZIO 4
Risolvere il seguente problema:

$$
\begin{cases}
u_t + x^2u_x + 2tu = 2t & x \in \mathbb{R}, t > 0,\\
u(x,0) = x & x \in \mathbb{R}.
\end{cases}
$$

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy per un'equazione del primo ordine a coefficienti variabili. L'equazione delle caratteristiche è $x' = x^2$, la cui soluzione generale è $x = -\frac{1}{t+C}$. Imponendo la condizione iniziale $x(0) = x_0$ troviamo $x_0 = -\frac{1}{C}$, $C = -\frac{1}{x_0}$ e quindi le due funzioni $x = \varphi(x_0,t) \equiv \frac{x_0}{1-x_0t}$, $x_0 = \psi(x,t) \equiv \frac{x}{1+xt}$. L'equazione alle derivate parziali lungo le caratteristiche si riduce a:

$$\begin{cases} U' + 2tU = 2t \\ U(0) = x_0 \end{cases}$$

il cui integrale generale si può calcolare mediante il metodo della variazione della costante arbitraria: ponendo $U(t) = v(t)e^{-t^2}$ si trova $v'e^{-t^2} = 2t$ e quindi $v(t) = e^{t^2} + C$, $U(t) = 1 + Ce^{-t^2}$, $U(x_0, t) = 1 + (x_0 - 1)e^{-t^2}$. Ne segue che la soluzione del problema iniziale è:

$$u(x,t) = U[\psi(x,t), t] = 1 + \frac{x - 1 - tx}{1 + tx} e^{-t^2}.$$

ESERCIZIO 5

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2e^t \cos x & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = e^{x^2} & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = e^x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione uno. Applicando la formula di D'Alembert troviamo:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{2}\left[e^{(x+t)^2} + e^{(x-y)^2}\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} e^y dy + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} 2e^s \cos y dy\right) ds \\ =& e^{x^2+t^2}\cosh 2xt + e^x \sinh t + \int_0^t e^s \left\{\sin[x + (t-s)] - \sin[x - (t-s)]\right\} ds \\ =& e^{x^2+t^2}\cosh 2xt + e^x \sinh t + 2\cos x \int_0^t e^s \sin(t-s) ds \\ =& e^{x^2+t^2}\cosh 2xt + e^x \sinh t + \cos x \left[e^s \sin(t-s) + e^s \cos(t-s)\right]_{s=0}^{s=t} \\ =& e^{x^2+t^2}\cosh 2xt + e^x \sinh t + e^t \cos x - \cos x(\sin t + \cos t). \end{aligned}$$