INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 20-02-2013

ESERCIZIO 1
Calcolare

$$\iint_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

dove V é il solido delimitato dalle superfici $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ed $\vec{F} = (xz^2, yz^2, xy)$.

SOLUZIONE
Si ha div$\vec{F} = 2z^2$ e quindi

$$\begin{aligned}
\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma =& 2 \iiint z^2 dxdydz \\
=& 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \rho^4 \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\rho d\varphi \\
=& 4\pi \int_0^1 \left[-\rho^4 \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} d\rho \\
=& 4\pi \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 \frac{2\sqrt{2} - 1}{6\sqrt{2}} \\
=& \frac{8 - 2\sqrt{2}}{15} \pi.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier di soli seni nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi/4, \\ 0 & \pi/4 < x < \pi/2, \\ -1 & \pi/2 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

esaminando la convergenza della serie ottenuta. E' richiesto anche il disegno dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE
La funzione è discontinua e quindi la convergenza non sarà totale. Per $k \geq 1$ si ha:

$$\begin{aligned}
b_k =& \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} \sin kx dx - \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin kx dx \\
=& \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\pi/4} - \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_{\pi/2}^{\pi} \\
=& -\frac{2\cos\frac{k\pi}{4}}{k\pi} + \frac{2}{k\pi} + \frac{2(-1)^k}{k\pi} - \frac{2\cos\frac{k\pi}{2}}{k\pi}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{2\cos\frac{k\pi}{4}}{k\pi}+\frac{2}{k\pi}+\frac{2(-1)^k}{k\pi}-\frac{2\cos\frac{k\pi}{2}}{k\pi}\right]\sin kx=\begin{cases} f(x) & 0<x<\pi,\ x\neq\pi/4,\pi/2\\ 0 & x=0,\pi\\ 1/2 & x=\pi/4\\ -1/2 & x=\pi/2.\end{cases}$$

ESERCIZIO 3
Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=e^t & x\in\mathbb{R},t>0\\ u(x,0)=0 & x\in\mathbb{R}\\ u_t(x,0)=\arctan x & x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Verificare che la funzione ottenuta è la soluzione del problema.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione 1. Applicando la formula di D'Alembert troviamo:

$$\begin{aligned}
u(x,t)=&\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\arctan y\,dy+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+s}^{x+t-s}e^s\,dyds\\
=&\frac{1}{2}\left[y\arctan y-\log\sqrt{1+y^2}\right]_{y=x-t}^{y=x+t}+\int_0^t(t-s)e^s\,ds\\
=&\frac{1}{2}\left[(x+t)\arctan(x+t)-\log\sqrt{1+(x+t)^2}-(x-t)\arctan(x-t)+\log\sqrt{1+(x-t)^2}\right]\\
&+\left[te^s-se^s+e^s\right]_{s=0}^{s=t}\\
=&\frac{1}{2}\left[(x+t)\arctan(x+t)-\log\sqrt{1+(x+t)^2}-(x-t)\arctan(x-t)+\log\sqrt{1+(x-t)^2}\right]\\
&+e^t-t-1.
\end{aligned}$$

<u>Verifica</u>: $u(x,0)=0$,

$$u_t(x,0)=\frac{1}{2}\left[\arctan x+\arctan x\right]+1-1=\arctan x,$$

e ponendo $u(x,t)=\varphi(x+t)+\varphi(x-t)+e^t-t-1$, dove $\varphi(y)=y\arctan y-\log\sqrt{1+y^2}$, si ha

$$u_{tt}-u_{xx}=\left[\varphi''(x+t)+\varphi''(x-t)+e^t\right]-\left[\varphi''(x+t)+\varphi''(x-t)\right]=e^t.$$

ESERCIZIO 4
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0 & x\in\mathbb{R},t>0,\\ u(x,0)=e^x\sin x & x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Verificare che la funzione ottenuta è la soluzione del problema.

SOLUZIONE Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione del calore sulla retta.

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} e^{x+2s\sqrt{t}} \sin(x+2s\sqrt{t}) ds \\
=& \frac{e^{x+t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s-\sqrt{t})^2} \sin[(x+2t)+2(s-\sqrt{t})\sqrt{t}] ds \\
=& \sin(x+2t) \frac{e^{x+t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s-\sqrt{t})^2} \cos[2(s-\sqrt{t})\sqrt{t}] ds \\
(r = s - \sqrt{t}) \qquad =& \sin(x+2t) \frac{e^{x+t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} \cos(2r\sqrt{t}) dr \\
=& e^x \sin(x+2t).
\end{aligned}
$$

Verifica: $u(x,0) = e^x \sin x$ e poi $u_t - u_{xx} = 2^x \cos(x+2t) - 2^x \cos(x+2t) = 0$

ESERCIZIO 5
Risolvere il seguente problema:

$$
\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 8x + 8y & x^2 + y^2 < 1, \\ u = 2x + 2y & x^2 + y^2 = 1. \end{cases}
$$

Verificare che la funzione ottenuta è la soluzione del problema.

SOLUZIONE Si tratta di un problema Dirichlet per l'equazione di Poisson nel disco unitario. In coordinate polari il problema diventa

$$
\begin{cases} U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta} = 8r\cos\theta + 8r\sin\theta & 0 < r < 1, 0 \le \theta \le 2\pi \\ U(1,\theta) = 2\sin\theta + 2\cos\theta & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}
$$

La soluzione va cercata nella forma $U(r,\theta) = v_1(r)\sin\theta + v_2(r)\cos\theta$. Per v_1 abbiamo il problema

$$
\begin{cases} v_1'' + \frac{1}{r} v_1' - \frac{1}{r^2} v_1 = 8r \\ v_1(1) = 2, v_1 \text{ limitata}, \end{cases}
$$

la cui soluzione è $v_1(r) = r + r^3$. Il problema per v_2 è il medesimo. Quindi la soluzione del problema iniziale è:

$$
U(r,\theta) = (r + r^3)\sin\theta + (r + r^3)\cos\theta = x + y + x^3 + x^2y + xy^2 + y^3.
$$

Verifica:

$$
[x + y + x^3 + x^2y + xy^2 + y^3]_{x^2+y^2=1} = [x + y + (x^2+y^2)(x+y)]_{x^2+y^2=1} = 2x + 2y
$$

e poi

$$
\Delta(5y - 2x + 2x^3 + 2xy^2) = 6x + 2y + 2x + 6y = 8x + 8y.
$$