INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
PROVA SCRITTA DEL 21-06-2012 - SOLUZIONI

ESERCIZIO 1
Calcolare il seguente integrale:

$$\iiint_\Omega x^2z^2dxdydz,$$

dove

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1, z^2 \le x^2+y^2\}.$$

SOLUZIONE
In coordinate sferiche si ha:

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega x^2z^2dxdydz =& \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^1 \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\cdot\rho^2\cos^2\theta\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi\\ =&\frac{1}{7}\int_0^{2\pi}\left[\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left(\cos^2\theta-\cos^4\theta\right)\sin\theta d\theta\right]\cos^2\varphi d\varphi\\ =&\frac{\pi}{7}\left[\frac{\cos^5\theta}{5}-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\pi/4}^{3\pi/4}\\ =&\frac{\pi}{30\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier di soli coseni nell'intervallo $[0,\pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{per} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{per} \quad \frac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases}$$

Esaminare la convergenza dello sviluppo ottenuto e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE
Osserviamo preliminarmente che f è discontinua (in $\pi/2$) e quindi la convergenza dello sviluppo ottenuto non sarà totale. Procediamo ora con il calcolo dei coefficienti. Si ha:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x^3dx = \frac{2}{\pi}\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{32},$$

e per $k \ge 1$,

$$
\begin{aligned}
a_k =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x^3 \cos kx dx\\
=& \frac{2}{\pi}\left[x^3\frac{\sin kx}{k} + 3x^2\frac{\cos kx}{k^2} - 6x\frac{\sin kx}{k^3} - 6\frac{\cos kx}{k^4}\right]_0^{\pi/2}\\
=& \frac{\pi^2\sin(k\pi/2)}{4k} + \frac{3\pi\cos(k\pi/2)}{2k^2} - \frac{6\sin(k\pi/2)}{k^3} - \frac{12\cos(k\pi/2)}{\pi k^4} + \frac{12}{\pi k^4}.
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\pi^3}{64} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\pi^2\sin(k\pi/2)}{4k} + \frac{3\pi\cos(k\pi/2)}{2k^2} - \frac{6\sin(k\pi/2)}{k^3} - \frac{12\cos(k\pi/2)}{\pi k^4} + \frac{12}{\pi k^4}\right]\cos kx\\
&\qquad = \begin{cases} f(x) & \text{per} \quad x \in [0,\pi]\setminus\{\pi/2\},\\ \pi^3/16 & \text{per} \quad x = \pi/2, \end{cases}
\end{aligned}
$$

con convergenza puntuale ma non totale.

ESERCIZIO 3
Risolvere il seguente problema:

$$
\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x^3 & x \in \mathbb{R}, t > 0,\\ u(x,0) = x^3 & x \in \mathbb{R},\\ u_t(x,0) = 3x^2 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}
$$

Verificare che la funzione ottenuta risolve effettivamente il problema.

SOLUZIONE Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione 1. Applicando la formula di D'Alembert, troviamo

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =& \frac{1}{2}\left[(x+t)^3 + (x-t)^3\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 3y^2 dy + \frac{1}{2}\int_0^t \left[\int_{x-t+s}^{x+t-s} y^3 dy\right] ds\\
=& \frac{1}{2}\left[(x+t)^3 + (x-t)^3\right] + \frac{1}{2}\left[(x+t)^3 - (x-t)^3\right] + \frac{1}{8}\int_0^t \left[(x+t-s)^4 - (x-t+s)^4\right] ds\\
=&(x+t)^3 + \frac{1}{40}\left[-(x+t-s)^5 - (x-t+s)^5\right]_{s=0}^{s=t}\\
=&(x+t)^3 + \frac{(x+t)^5 + (x-t)^5}{40} - \frac{x^5}{20}\\
=&(x+t)^3 + \frac{1}{4}xt^4 + \frac{1}{2}x^3t^2.
\end{aligned}
$$

<u>Verifica</u>: $u(x,0) = x^3$, $u_t = 3(x+t)^2 + xt^3 + x^3t$ e $u(x,0) = 3x^2$. Infine:

$$u_{tt} - u_{xx} = [6(x+t) + 3xt^2 + x^3] - [6(x+t) + 3xt^2] = x^3.$$

ESERCIZIO 4
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = x^2 \cos^2 x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare che la funzione ottenuta risolve effettivamente il problema.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione del calore sulla retta. Si ha:

$$\begin{aligned}
u(x,t) =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} (x + 2s\sqrt{t})^2 \cos^2(x + 2s\sqrt{t}) ds \\
=& \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} (x + 2s\sqrt{t})^2 [1 + \cos(2x + 4s\sqrt{t})] ds \\
=& \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \big[x^2 e^{-s^2} + 4ts^2 e^{-s^2} \\
& \qquad + e^{-s^2} (x^2 + 4xs\sqrt{t} + 4s^2 t)(\cos 2x \cos 4s\sqrt{t} - \sin 2x \sin 4s\sqrt{t}) \big] ds \\
=& \frac{x^2}{2} + t + \frac{x^2 \cos 2x}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos 4s\sqrt{t} ds + \frac{2t \cos 2x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 e^{-s^2} \cos 4s\sqrt{t} ds \\
& - \frac{2x\sqrt{t} \sin 2x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-s^2} \sin 4s\sqrt{t} ds \\
=& \frac{x^2}{2} + t + e^{-4t} \frac{x^2 \cos 2x}{2} + te^{-4t} \cos 2x - 8t^2 e^{-4t} \cos 2x - 4te^{-4t} x \sin 2x
\end{aligned}$$

<u>Verifica</u>: $u(x,0) = x^2 \frac{1+\cos 2x}{2} = x^2 \cos^2 x$ e poi

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} =& \Big[1 - 2e^{-4t} x^2 \cos 2x + e^{-4t} \cos 2x - 4te^{-4t} \cos 2x - 16te^{-4t} \cos 2x \\
& \qquad + 32t^2 e^{-4t} \cos 2x - 4e^{-4t} x \sin 2x + 16te^{-4t} x \sin 2x \Big] \\
& - \Big[1 + e^{-4t} \cos 2x - 4e^{-4t} x \sin 2x - 2e^{-4t} x^2 \cos 2x - 4te^{-4t} \cos 2x \\
& \qquad + 32t^2 e^{-4t} \cos 2x + 16te^{-4t} x \sin 2x - 16te^{-4t} \cos 2x \Big] \\
=& 0.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 5
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 16x & x^2 + y^2 < 1, \\ u = 5y & x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Verificare che la funzione ottenuta risolve effettivamente il problema.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema Dirichlet per l'equazione di Poisson nel disco unitario. In coordinate polari il problema diventa

$$\begin{cases} U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta} = 16r \cos\theta & 0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ U(1, \theta) = 5 \sin\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

La soluzione va cercata nella forma $U(r, \theta) = v_1(r) \sin\theta + v_2(r) \cos\theta$. Per v_1 abbiamo il problema

$$\begin{cases} v_1'' + \frac{1}{r} v_1' - \frac{1}{r^2} v_1 = 0 \\ v_1(1) = 5, v_1 \text{ limitata}, \end{cases}$$

la cui soluzione è $v_1(r) = 5r$. Per v_2 abbiamo il problema

$$\begin{cases} v_2'' + \frac{1}{r} v_2' - \frac{1}{r^2} v_2 = 16r \\ v_2(1) = 0, v_2 \text{ limitata}, \end{cases}$$

la cui soluzione è $v_2(r) = -2r + 2r^3$. Quindi la soluzione del problema iniziale è:

$$U(r, \theta) = 5r \sin\theta - 2r \cos\theta + 2r^3 \cos\theta = 5y - 2x + 2x^3 + 2xy^2.$$

<u>Verifica</u>: $[5y - 2x + 2x^3 + 2xy^2]_{x^2+y^2=1} = [5y - 2x + 2x(x^2 + y^2)]_{x^2+y^2=1} = 5y$ e poi $\Delta(5y - 2x + 2x^3 + 2xy^2) = 12x + 4x = 16x$.