INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 25-01-2013

ESERCIZIO 1
Utilizzando il teorema di Stokes, calcolare il seguente integrale:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot\vec{v}dt,$$

dove $\mathcal{C}$ é la curva $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z+x=3 \end{cases}$ ed $\vec{F}=(y^2-2x, z^2-2y, x^2-2z)$.

SOLUZIONE
Applicando il teorema di Stokes troviamo:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot\vec{v}dt = \int_{+\Sigma} \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma,$$

dove

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-2x & z^2-2y & x^2-2z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-2z)+\mathbf{j}(-2x)+\mathbf{k}(-2y) \equiv (-2z,-2x,-2y)$$

e Σ è la superficie di equazioni parametriche $\begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=3-x \end{cases}$, $(x,y)\in D$, con $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 9\}$. Si ha:

$$L=\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1, \qquad M=\frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0, \qquad N=\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

e quindi

$$\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad d\sigma=\sqrt{2}dxdy.$$

Allora $\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}=-\sqrt{2}(y+z)=-\sqrt{2}(y+3-x)$ e si ha:

$$\int_{+\Sigma}\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma=-2\iint_D(y-x+3)dxdy=-6\mathrm{Area}(D)=-54\pi.$$

ESERCIZIO 2
Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier di soli seni della funzione $f(x)=\begin{cases} \sin 2x & \text{per } 0\le x\le \pi/2 \\ 0 & \text{per } \pi/2\le x\le\pi \end{cases}$.
Esaminare la convergenza dello sviluppo ottenuto e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE
Osserviamo preliminarmente che f è continua in $[0,\pi]$ (poiché $\sin 2x|_{x=\pi/2}=0$) e che $f(0)=0=f(\pi)$: le condizioni di commpatibilità sono verificate e quindi la convergenza dello sviluppo ottenuto sarà totale. Procediamo ora con il calcolo dei coefficienti. Si ha:

$$b_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4x)dx = \frac{1}{2},$$

e per $k \geq 1$, $k \neq 2$,

$$\begin{aligned}
b_k =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin 2x \sin kx dx \\
=& \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left[\cos(k-2)x - \cos(k+2)x\right] dx \\
=& \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k-2)x}{k-2} - \frac{\sin(k+2)x}{k+2}\right]_0^{\pi/2} \\
=& \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k-2)\frac{\pi}{2}}{k-2} - \frac{\sin(k+2)\frac{\pi}{2}}{k+2}\right] \\
=& \frac{-4\sin\frac{k\pi}{2}}{\pi(k^2-4)} \equiv \begin{cases} 0 & \text{per } k \text{ pari,} \\ \frac{4(-1)^{m+1}}{\pi[(2m+1)^2-4]} & \text{per } k = 2m+1 \text{ dispari.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 2}}^{\infty} \frac{-4\sin\frac{k\pi}{2}}{\pi(k^2-4)}\sin kx \equiv \frac{1}{2}\sin 2x + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{4(-1)^{m+1}}{\pi[(2m+1)^2-4]}\sin(2m+1)x.$$

per ogni $x \in [0,\pi]$, con convergenza totale.

ESERCIZIO 3

Dopo aver determinato la soluzione stazionaria, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -2 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x,0) = f(x) + x^2 - \frac{\pi^2-1}{\pi}x + 1 & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = 1, u(\pi,t) = 2 & t > 0, \end{cases}$$

dove $f(x)$ è la funzione dell'esercizio precedente. Calcolare anche la velocità di convergenza alla soluzione stazionaria.

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore in dimensione 1. La soluzione stazionaria si trova risolvendo il problema $\begin{cases} -u_{\mathrm{s}}'' = -2, \\ u_{\mathrm{s}}(0) = 1, u_{\mathrm{s}}(\pi) = 2, \end{cases}$, e quindi $u_{\mathrm{s}}(x) = x^2 - \frac{\pi^2-1}{\pi}x + 1$. Ponendo $v(x,t) = u(x,t) - u_{\mathrm{s}}(x)$, la funzione v deve risolvere il problema:

$$\begin{cases} v_t - 2v_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ v(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

Indicando con b_k i coefficienti dello sviluppo dell'esercizio precedente, si ha:

$$u(x,t) = x^2 - \frac{\pi^2-1}{\pi}x + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t}\sin kx,$$

e per $t \geq \pi^2$

$$|u(x,t) - u_{\mathrm{s}}(x)| \leq 4e^{-t}.$$

ESERCIZIO 4

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x,y,z,0) = \frac{z}{1+z^2} & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,y,z,0) = x\cos z & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Verificare che la funzione ottenuta risolve effettivamente il problema.

SOLUZIONE

Si tratta di un problema Cauchy per l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^3$. Calcoliamo le medie sferiche dei dati:

$$\begin{aligned} M_g(x,y,z,r) =& \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{z + r\cos\theta}{1 + (z + r\cos\theta)^2}\sin\theta d\theta d\varphi \\ (s = z + r\cos\theta) \qquad =& \frac{1}{2r}\int_{z-r}^{z+r} \frac{s}{1+s^2} ds = \frac{1}{4r}\left[\log(1+s^2)\right]_{s=z-r}^{s=z+r} \\ =& \frac{1}{4r}\log\frac{1+(z+r)^2}{1+(z-r)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_h(x,y,z,r) =& \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(x + r\sin\theta\cos\varphi)\cos(z + r\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi \\ =& \frac{x}{2}\int_0^{\pi}\cos(z + r\cos\theta)\sin\theta d\theta \\ (s = z + r\cos\theta) \qquad =& \frac{x}{2r}\int_{z-r}^{z+r}\cos s ds \\ =& \frac{x}{2r}[\sin(z+r) - \sin(z-r)] \\ =& x\frac{\sin r}{r}\cos z. \end{aligned}$$

Applicando la formula di Kirchhoff, si trova:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) =& \frac{\partial}{\partial t}\left(t\cdot\frac{1}{4t}\log\frac{1+(z+t)^2}{1+(z-t)^2}\right) + t\cdot x\frac{\sin t}{t}\cos z \\ =& \frac{(z+t)}{2[1+(z+t)^2]} + \frac{(z-t)}{2[1+(z-t)^2]} + x\sin t\cos z. \end{aligned}$$

<u>Verifica</u>: È immediato verificare che $u(x,y,z,0) = \frac{z}{1+z^2}$. Usando le identità

$$\frac{d}{ds}\frac{s}{1+s^2} = \frac{1-s^2}{(1+s^2)^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2}{ds^2}\frac{s}{1+s^2} = \frac{2s^3-6s}{(1+s^2)^3}$$

troviamo che

$$u_t(x,y,z,t) = \frac{\left[1-(z+t)^2\right]}{2\left[1+(z+t)^2\right]^2} - \frac{[1-(z-t)^2]}{2[1+(z-t)^2]^2} + x\cos t\cos z$$

e quindi $u_t(x,y,z,0) = x\cos z$. Infine,

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u = & \left\{ \frac{[(z+t)^3 - 3(z+t)]}{[1+(z+t)^2]^3} + \frac{[(z-t)^3 - 3(z-t)]}{[1+(z-t)^2]^3} - x\sin t\cos z \right\} \\ & - \left\{ \frac{[(z+t)^3 - 3(z+t)]}{[1+(z+t)^2]^3} + \frac{[(z-t)^3 - 3(z-t)]}{[1+(z-t)^2]^3} - x\sin t\cos z \right\} \\ = & 0. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5

Determinare una funzione $g(y)$ definita in $[0,1]$ in modo tale che la soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u(x,0) = x^2, u(x,1) = x - x^2 & 0 \le x \le 1, \\ u(0,y) = 0, u(1,y) = g(y) & 0 \le y \le 1, \end{cases}$$

verifichi la condizione $u(x,y) \ge x^3 - 3xy^2$, per $(x,y) \in [0,1] \times 0,1]$.

SOLUZIONE

La funzione $x^3 - 3xy^2$ è armonica. Prendendo $g(y) = 1 - y^2$ i dati si raccordano e si ha $u(x,y) \ge x^3 - 3xy^2$ su tutta la frontiera di $[0,1] \times 0,1]$. La disuguaglianza voluta segue allora dal principio del massimo.