**INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA**
**PROVA SCRITTA DEL 20-09-2013 - SOLUZIONI**

ESERCIZIO 1
Sia $D$ il dominio nel piano $x, z$ descritto dalle condizioni $-z \leq x \leq z$ e $x^2 + z^2 \leq 2x$. Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando $D$ attorno all'asse $z$.

SOLUZIONE
In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$, il dominio è descritto dalle condizioni $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \rho \leq 2\cos\theta$. Applicando la formula per il volume di un solido di rotazione si trova:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(D) = 2\pi \iint_D x dxdz =& 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 \cos\theta d\rho d\theta \\
=& \frac{16\pi}{3} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4\theta d\theta \\
=& \frac{16\pi}{3} \left[ \frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{32}\sin 4\theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \pi^2 + \frac{8}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier la funzione periodica di periodo $2\pi$ che in $(-\pi, \pi]$ vale:

$$
f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per} \quad -\pi < x < 0 \\ x & \text{per} \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}
$$

Esaminare la convergenza della serie ottenuta e disegnare il grafico della funzione.

SOLUZIONE
Osserviamo che la funzione $f$ è discontinua nei punti $\pi + 2k\pi$ e quindi la convergenza non sarà totale. Si ha poi:

$$
a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x^2 dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{3},
$$

$$
\begin{aligned}
a_k =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x^2 \cos kx dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx dx \\
=& \left[\frac{x^2 \sin kx}{k\pi} + \frac{2x\cos kx}{k^2\pi} - \frac{2\sin kx}{k^3\pi}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{x\sin kx}{k\pi} + \frac{\cos kx}{k^2\pi}\right]_0^{\pi} \\
=& \frac{(2\pi+1)(-1)^k - 1}{k^2\pi},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_k =&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x^2\sin kx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin kx dx \\
=&\left[-\frac{x^2\cos kx}{k\pi}+\frac{2x\sin kx}{k^2\pi}+\frac{2\cos kx}{k^3\pi}\right]_{-\pi}^{0}+\left[-\frac{x\cos kx}{k\pi}+\frac{\sin kx}{k^2\pi}\right]_{0}^{\pi} \\
=&\frac{(-1)^k(\pi-1)}{k}+\frac{2[1-(-1)^k]}{k^3\pi}.
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2\pi+1)(-1)^k-1}{k^2\pi}\cos kx+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k(\pi-1)}{k}+\frac{2[1-(-1)^k]}{k^3\pi}\right]\sin kx \\
=\begin{cases} f(x) & \text{per } x\neq \pi+2k\pi, \\ (\pi^2+\pi)/2 & \text{per } x=\pi+2k\pi. \end{cases}
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 3
Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale: $u_t+2u_x-u=xe^t\cos t$. E' richiesta la verifica.

SOLUZIONE Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti. Applicando la formula risolutiva, ed indicando con $g(x)$ una generica funzione $C^1(\mathbb{R})$, si ha:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =&e^t\int_0^t e^{-s}[x+2(s-t)]\cdot e^s\cos s ds + e^t g(x-2t) \\
=&e^t\int_0^t [(x-2t)\cos s+2s\cos s]ds \\
=&e^t\left[(x-2t)\sin s+2s\sin s+2\cos s\right]_{s=0}^{s=t}+e^t g(x-2t) \\
=&xe^t\sin t+2e^t\cos t-2e^t+e^t g(x-2t).
\end{aligned}
$$

<u>Verifica</u>:

$$
\begin{aligned}
u_t+2u_x-u =&xe^t\cos t+xe^t\sin t+2e^t\cos t-2e^t\sin t-2e^t+e^t g(x-2t)-2e^t g'(x-2t) \\
&+2[e^t\sin t+e^t g'(x-2t)]-[xe^t\sin t+2e^t\cos t-2e^t+e^t g(x-2t)] \\
=&xe^t\cos t.
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 4
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = x \sin^2 x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione del calore sulla retta. Si ha:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} (x + 2s\sqrt{t}) \sin^2(x + 2s\sqrt{t}) ds \\ =& \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} (x + 2s\sqrt{t})[1 - \cos(2x + 4s\sqrt{t})] ds \\ =& \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ xe^{-s^2} + 2s\sqrt{t}e^{-s^2} - e^{-s^2}(x + 2s\sqrt{t}) \left( \cos 2x \cos 4s\sqrt{t} - \sin 2x \sin 4s\sqrt{t} \right) \right] ds \\ =& \frac{x}{2} - \frac{x \cos 2x}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos 4s\sqrt{t} ds + \frac{\sqrt{t} \sin 2x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-s^2} \sin 4s\sqrt{t} ds \\ =& \frac{x}{2} - e^{-4t} \frac{x \cos 2x}{2} + 2te^{-4t} \sin 2x \end{aligned}$$

<u>Verifica</u>: $u(x,0) = x\frac{1-\cos 2x}{2} = x \sin^2 x$ e poi

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} =& 4e^{-4t} \frac{x \cos 2x}{2} + 2e^{-4t} \sin 2x - 8te^{-4t} \sin 2x \\ & - 2e^{-4t} \sin x - 2e^{-4t} x \cos 2x + 8te^{-4t} \sin 2x \\ =& 0. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5
Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 24xy & x^2 + y^2 < 1 \\ u = x + 4xy & x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica.

SOLUZIONE
E' un problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson nel disco unitario. In coordinate polari abbiamo:

$$24xy = 24r^2 \cos\theta \sin\theta = 12r^2 \sin 2\theta, \qquad (x + 4xy)|_{x^2+y^2=1} = \cos\theta + 2\sin 2\theta$$

e quindi il problema diventa

$$\begin{cases} U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 12r^2 \sin 2\theta & 0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ U(1,\theta) = \cos\theta + 2\sin 2\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

La soluzione va cercata nella forma $U(r,\theta) = v_1(r)\sin 2\theta + v_2(r)\cos\theta$. Per $v_1$ abbiamo il problema

$$\begin{cases} v_1'' + \frac{1}{r}v_1' - \frac{4}{r^2}v_1 = 12r^2 \\ v_1(1) = 2, v_1 \text{ limitata in } 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è $v_1(r) = r^2 + r^4$. Per $v_2$ il problema é:

$$\begin{cases} v_2'' + \frac{1}{r}v_2' - \frac{1}{r^2}v_2 = 0 \\ v_2(1) = 1, v_2 \text{ limitata in } 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è $v_2(r) = r$. Quindi la soluzione del problema iniziale è:

$$\begin{aligned} U(r,\theta) =& r\cos\theta + (r^2 + r^4)\sin 2\theta = x + 2(r^2 + r^4)\sin\theta\cos\theta \\ =& x + 2(1 + x^2 + y^2)xy = x + 2xy + 2xy^3 + 2x^3y. \end{aligned}$$

<u>Verifica</u>:

$$u|_{x^2+y=2=1} = x + 4xy, \qquad u_{xx} + u_{yy} = 24xy.$$