

**INGEGNERIA ELETTROTECNICA - ANALISI MATEMATICA I  
PROVA SCRITTA DEL 03-02-2014 - COMPITO A**

**ESERCIZIO 1**

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = x \\ y(0) = 0; y'(0) = 1. \end{cases}$$

**SOLUZIONI**

Soluzione generale:  $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x - 2$ ; soluzione del problema di Cauchy:  $y(x) = 2e^{-x} + 2x e^{-x} + x - 2$ .

**ESERCIZIO 2**

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n+1}} \log\left(\cos \frac{1}{n}\right).$$

**SOLUZIONE**

Si ha  $\frac{n+2}{\sqrt{n+1}} \log\left(\cos \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n\sqrt{n}}$ . La serie converge.

**ESERCIZIO 3**

Calcolare il seguente integrale:

$$\int (x + e^x) \sin x dx.$$

**SOLUZIONE**

Vale  $-x \cos x + \sin x + \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$ .

**ESERCIZIO 4**

Calcolare la forma algebrica e trigonometrica del numero  $z = -\frac{8i}{\sqrt{3}+i}$  e delle sue radici quadrate.

**SOLUZIONI**

$z = -2i\sqrt{3} - 2 = 4\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$ ; le radici sono  $\pm 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) = \pm(-1 + i\sqrt{3})$ .

**ESERCIZIO 5**

Sia  $f(x)$  una funzione definita e continua in  $\mathbb{R}$  e tale che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono sempre verificate e per le altre fornire un controesempio:

- a)  $f(x) \sim x^2 \quad x \rightarrow 0$ ;    b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)^2}{x} = 1$ ;    c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)^4} = +\infty$ ;    d)  $f'(0)$  esiste e vale 0.

SOLUZIONE

(a) controesempio:  $f(x) = x$ ; (b) controesempio:  $f(x) = x$ ; (c) controesempio:  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  per  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ , l'affermazione è però vera se si suppone  $f(x) \neq 0$  in un intorno di 0; (d) controesempio:  $f(x) = x$  ( $f'(0) = 1$ ) o anche  $f(x) = |x|$  ( $f'(0)$  non esiste).

**INGEGNERIA ELETTRONICA - ANALISI MATEMATICA I  
PROVA SCRITTA DEL 03-02-2014 - COMPITO B**

**ESERCIZIO 1**

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x \\ y(0) = 0; y'(0) = 1. \end{cases}$$

**SOLUZIONI**

Soluzione generale:  $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + x + 2$ ; soluzione del problema di Cauchy:  $y(x) = -2e^x + 2x e^x + x + 2$ .

**ESERCIZIO 2**

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n} + 1}{n + 2} \log\left(\cos \frac{1}{n}\right).$$

**SOLUZIONE**

Si ha  $\frac{n\sqrt{n}+1}{n+2} \log\left(\cos \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n\sqrt{n}}$ . La serie converge.

**ESERCIZIO 3**

Calcolare il seguente integrale:

$$\int (x - e^x) \cos x dx.$$

**SOLUZIONE**

$x \sin x + \cos x + \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$ .

**ESERCIZIO 4**

Calcolare la forma algebrica e trigonometrica del numero  $z = -\frac{2i+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$  e delle sue radici quadrate.

**SOLUZIONI**

$z = -i\sqrt{3} - 1 = 2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$ ; le radici sono:  $\pm\sqrt{2}\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) = \pm\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ .

**ESERCIZIO 5**

Sia  $f(x)$  una funzione definita e continua in  $\mathbb{R}$  e tale che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono sempre verificate e per le altre fornire un controesempio:

- a)  $f(x) \sim x \quad x \rightarrow 0$ ;    b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ;    c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)^2} = +\infty$ ;    d)  $f'(0)$  esiste e vale 1.

SOLUZIONE

(a) controesempio:  $f(x) = x^2$ ; (b) controesempio:  $f(x) = x^2$ ; (c) controesempio:  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  per  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ , l'affermazione è però vera se si suppone  $f(x) \neq 0$  in un intorno di 0; (d) controesempio:  $f(x) = x^2$  ( $f'(0) = 0$ ) o anche  $f(x) = |x|$  ( $f'(0)$  non esiste).