ANALISI MATEMATICA I - II modulo
Ingegneria Informatica - canale I
Ingegneria Automatica
Compito del 11-07-2008

COMPITO I

ESERCIZIO 1
Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2}{x}y + \log x - 1.$$

Determinare poi una soluzione $\widetilde{y}$ che goda della seguente proprietà: il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\widetilde{y}(x)}{x\log x}$$

esiste ed è finito.

SOLUZIONE
L'equazione è lineare del primo ordine. Si ha $A(x) = \log(x^2)$ e cercando la soluzione nella forma $y(x) = x^2 v(x)$, troviamo per v la seguente equazione $x^2 v' = \log x - 1$. Si risolve con una semplice integrazione:

$$v(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} \log x - \frac{1}{x^2} \right) dx = -\frac{1}{x} \log x + \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \log x + c$$

e quindi l'integrale generale è: $y(x) = -x\log x + cx^2$. Inoltre il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x\log x}$ è finito se e solo se $c = 0$, e quindi $\widetilde{y} = -x\log x$.

ESERCIZIO 2
Data la funzione $f(x, y) = y^2 - x^2 - 2xy + 2x$ e il triangolo T di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 0)$

a) determinare i punti critici di f interni a T e la loro natura;
b) determinare il minimo e il massimo assoluto di f in T.

SOLUZIONE
Abbiamo $f_x = -2x - 2y + 2$ e $f_y = 2y - 2x$, e quindi i punti critici si determinano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} -2x - 2y + 2 = 0 \\ 2y - 2x = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, interno a T. Il determinante Hessiano in tale punto vale $\det\left(\begin{smallmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{smallmatrix}\right) = -8 < 0$, e quindi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è un punto di sella.

Sul lato $y = 0, 0 \leq x \leq 2$ la funzione vale $f(x, 0) = -x^2 + 2x$, e quindi ha un massimo relativo in $x = 1$, dove vale $f(1, 0) = 1$. Agli estremi vale $f(0, 0) = 0 = f(2, 0)$.

Sul lato $x = 0, 0 \leq y \leq 1$ la funzione vale $f(0, y) = y^2$, e quindi è una funzione crescente della y. Agli estremi vale $f(0, 1) = 1$ e $f(0, 0) = 0$ (già visto).

Sul lato $y = -\frac{x}{2} + 1$, $0 \leq x \leq 2$, la funzione vale $f(x, -\frac{x}{2} + 1) = \frac{x^2}{4} - x + 1$. Presenta un minimo relativo per $x = 2$, che corrispondendo ad uno dei vertici è già stato considerato.

Riassumendo, $\max_T f = 1$, assunto in $(1, 0)$ e $(0, 1)$, $\min_T f = 0$, assunto in $(2, 0)$ e $(0, 0)$.

ESERCIZIO 3
Calcolare il seguente integrale doppio: $\displaystyle\iint_C xy\, dxdy$, dove $C = C_1 \cup C_2$ e $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$, $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \leq 0\}$.

SOLUZIONE
Sfruttando l'additività e utilizzando le coordinate polari ($x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta$), l'integrale diventa:

$$
\begin{aligned}
\int_C xydxdy &= \int_{C_1} xydxdy + \int_{C_2} xydxdy \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^3 \sin\theta \cos\theta d\rho d\theta + \int_\pi^{3\pi/2} \int_0^1 \rho^3 \sin\theta \cos\theta d\rho d\theta \\
&= 4 \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{4} \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_\pi^{3\pi/2} = 2 + \frac{1}{8} = \frac{17}{8}.
\end{aligned}
$$

COMPITO II

ESERCIZIO 1
Determinare l'integrale genrale della seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2}{x}y - \log x + 1.$$

Determinare poi una soluzione $\widetilde{y}$ che goda della seguente proprietà: il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\widetilde{y}(x)}{x\log x}$$

esiste ed è finito.

SOLUZIONE
L'equazione è lineare del primo ordine. Si ha $A(x) = \log(x^2)$ e cercando la soluzione nella forma $y(x) = x^2 v(x)$, troviamo per v la seguente equazione $x^2 v' = -\log x + 1$. Si risolve con una semplice integrazione:

$$v(x) = \int \left(-\frac{1}{x^2}\log x + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{x}\log x - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x}\log x + c$$

e quindi l'integrale generale è: $y(x) = x\log x + cx^2$. Inoltre il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x\log x}$ è finito se e solo se $c = 0$, e quindi $\widetilde{y} = x\log x$.

ESERCIZIO 2
Data la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y$ e il triangolo T di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 1)$

a) determinare i punti critici di f interni a T e la loro natura;
b) determinare il minimo e il massimo assoluto di f in T.

SOLUZIONE
Abbiamo $f_x = 2x - 2y$ e $f_y = -2y - 2x + 2$, e quindi i punti critici si determinano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, interno a T. Il determinante Hessiano in tale punto vale $\det\left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{smallmatrix}\right) = -8 < 0$, e quindi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è un punto di sella.

Sul lato $x = 0, 0 \le y \le 1$ la funzione vale $f(0, y) = -y^2 + 2y$. Quindi ha un massimo relativo in $y = 1$, che è anche un estremo, e si ha $f(0, 1) = 1$. All'altro estremo troviamo $f(0, 0) = 0$.

Sul lato $y = 0, 0 \le x \le 2$ la funzione vale $f(x, 0) = x^2$, e quindi è una funzione crescente della x. Agli estremi vale $f(2, 0) = 4$ e $f(0, 0) = 0$ (già visto).

Sul lato $y = -\frac{x}{2} + 1$, $0 \le x \le 2$, la funzione vale $f(x, -\frac{x}{2} + 1) = \frac{7}{4}x^2 - 2x + 1$. Presenta un minimo relativo per $x = \frac{4}{7}$, e si ha $f(\frac{4}{7}, \frac{5}{7}) = \frac{3}{7}$.

Riassumendo, $\max_T f = 4$, assunto in $(2, 0)$, $\min_T f = 0$, assunto in $(0, 0)$.

ESERCIZIO 3
Calcolare il seguente integrale doppio: $\displaystyle\iint_C xy\, dxdy$, dove $C = C_1 \cup C_2$ e $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4, x \le 0, y \ge 0\}$, $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \le 0\}$.

SOLUZIONE
Sfruttando l'additività e utilizzando le coordinate polari ($x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta$), l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}
\int_C xydxdy &= \int_{C_1} xydxdy + \int_{C_2} xydxdy \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^2 \rho^3 \sin\theta \cos\theta d\rho d\theta + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 \sin\theta \cos\theta d\rho d\theta \\
&= 4\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi} + \frac{1}{4}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{3\pi/2}^{2\pi} = -2 - \frac{1}{8} = -\frac{17}{8}.
\end{aligned}$$