ANALISI MATEMATICA I - II modulo
Ingegneria Informatica - canale I
Ingegneria Automatica
Compito del 15-04-2008

COMPITO I

ESERCIZIO 1
Stabilire se la funzione $f(x,y) = |y^2 - x^2|(e^{x+y} - 1)$ è derivabile parzialmente nei punti $(-1,1)$ e $(2,1)$ e, nel caso lo sia, calcolarne le derivate parziali.

SOLUZIONE

In $(-1,1)$ abbiamo

$$\frac{f(-1+h,1) - f(-1,1)}{h} = \frac{|h||h-2|(e^h - 1)}{h} \to 0 \qquad \text{per} \quad h \to 0$$

e

$$\frac{f(-1,1+h) - f(-1,1)}{h} = \frac{|h||h+2|(e^h - 1)}{h} \to 0 \qquad \text{per} \quad h \to 0$$

poichè $\frac{e^h-1}{h} \to 0$ per $h \to 0$. Quindi f è derivabile in $(-1,1)$ e le derivate sono entrambe nulle.

Nell'insieme aperto $\{(x,y) : x > 0 \text{ e } -x < y < x\}$, contenente $(2,1)$, si ha $f(x,y) = (x^2-y^2)(e^{x+y}-1)$, e quindi in tale insieme f è derivabile e si ha: $f_x = 2x(e^{x+y}-1)+(x^2-y^2)e^{x+y}$, $f_y(x,y) = -2y(e^{x+y} - 1) + (x^2 - y^2)e^{x+y}$. In particolare, f è derivabile in $(2,1)$ e si ha: $f_x(2,1) = 7e^3 - 4$, $f_y(2,1) = e^3 + 2$.

ESERCIZIO 2

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = ye^{-x} + e^{-x} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

SOLUZIONE

L'equazione è sia lineare del primo ordine che a variabili separabili. Risolvendola come lineare, possiamo prendere $A(x) = -e^{-x}$ e cercare la soluzione nella forma $y(x) = v(x)e^{-e^{-x}}$. Si trova $v(x) = \int e^{e^{-x}} e^{-x} dx = -e^{e^{-x}} + C$ (l'integrale si calcola con la sostituzione $t = e^{-x}$). Quindi la soluzione generale è: $y(x) = Ce^{-e^{-x}} - 1$. Imponendo la condizione iniziale, troviamo $C = 2e$, e quindi la soluzione del problema è: $y(x) = 2e^{1-e^{-x}} - 1$.

Se la risolviamo come equazione a variabili separabili, troviamo $\int \frac{dy}{y+1} = \int e^{-x} dx$, che integrata dà: $|y+1| = -e^{-x} + C_1$. Quindi $y + 1 = \pm e^{C_1} e^{-e^{-x}}$, e sostituendo $\pm e^{C_1}$ con C ritroviamo l'integrale generale (recuperiamo anche la soluzione costante $y \equiv -1$, che comunque non interessa ai fini del nostro problema di Cauchy). Poi si può imporre la condizione iniziale come sopra.

ESERCIZIO 3

Calcolare il seguente integrale doppio: $\displaystyle\iint_C y\, dxdy$, dove $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-4y \leq 0, x^2+y^2-2y \geq 0, x \geq 0\}$.

SOLUZIONE

In coordinate polari $(x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta)$, l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho^2\sin\theta d\rho d\theta =& \frac{56}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta d\theta \\
=& \frac{56}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2\theta d\theta \\
=& \frac{56}{3}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{4}-\frac{\cos 2\theta}{2}+\frac{(\cos 2\theta)^2}{4}\right]\theta d\theta \\
=& \frac{56}{3}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{4}-\frac{\cos 2\theta}{2}+\frac{1+\cos 4\theta}{8}\right]\theta d\theta \\
=& \frac{7}{2}\pi.
\end{aligned}$$

L'integrale in $d\theta$ si può calcolare anche per parti: si ha

$$\begin{aligned}
\int \sin^4\theta d\theta = \int \sin^3\theta\sin\theta d\theta &= -\cos\theta\sin^3\theta + 3\int\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta \\
&= -\cos\theta\sin^3\theta + 3\int\sin^2\theta d\theta - 3\int\sin^4\theta d\theta
\end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$\int\sin^4\theta d\theta = \frac{1}{4}\left[-\cos\theta\sin^3\theta+\frac{3}{2}\int(1-\cos 2\theta)d\theta\right] = -\frac{1}{4}\cos\theta\sin^3\theta+\frac{3}{8}\theta-\frac{3}{16}\sin 2\theta + C,$$

e quindi ancora $\displaystyle\frac{56}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta d\theta = \frac{7}{2}\pi$.

L'itegrale doppio puó anche essere calcolato scrivendo $C = C_1 \setminus C_2$ (differenza insiemistica), dove $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-4y \leq 0, x \geq 0\}$ e $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2y \leq 0, x \geq 0\}$. Usando le coordinate polari $x = \rho\cos\theta, y = 2+\rho\sin\theta$ in C_2 e $x = \rho\cos\theta, y = 1+\rho\sin\theta$ in C_1, si trova:

$$
\begin{aligned}
\iint_C y\ dxdy &= \iint_{C_1} y\ dxdy - \iint_{C_2} y\ dxdy \\
&= \int_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2+\rho\sin\theta)\rho d\theta d\rho - \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\rho\sin\theta)\rho d\theta d\rho \\
&= \int_0^2 2\pi\rho d\rho - \int_0^1 \pi\rho d\rho = \frac{7}{2}\pi.
\end{aligned}
$$

ANALISI MATEMATICA I - II modulo
Ingegneria Informatica - canale I
Ingegneria Automatica
Compito del 15-04-2008

COMPITO II

ESERCIZIO 1
Stabilire se la segunte funzione $f(x, y) = |x^2 - y^2| \sin(x + y)$ è derivabile parzialmente nei punti $(1, -1)$ e $(2, 1)$ e, nel caso lo sia, calcolarne le derivate parziali.

SOLUZIONE

In $(1, -1)$ abbiamo

$$\frac{f(1+h, -1) - f(1, -1)}{h} = \frac{|h||h+2| \sin h}{h} \to 0 \qquad \text{per} \quad h \to 0$$

e

$$\frac{f(1, -1+h) - f(1, -1)}{h} = \frac{|h||h-2| \sin h}{h} \to 0 \qquad \text{per} \quad h \to 0$$

poichè $\frac{\sin h}{h} \to 0$ per $h \to 0$. Quindi f è derivabile in $(1, -1)$ e le derivate sono entrambe nulle.

Nell'insime aperto $\{(x, y) : x > 0 \text{ e } -x < y < x\}$, contenente $(2, 1)$, si ha $f(x, y) = (x^2 - y^2) \sin(x+y)$, e quindi in tale insieme f è derivabile e si ha: $f_x = 2x \sin(x+y) + (x^2 - y^2) \cos(x+y)$, $f_y(x, y) = -2y \sin(x + y) + (x^2 - y^2) \cos(x + y)$. In particolare, f è derivabile in $(2, 1)$ e si ha: $f_x(2, 1) = 4 \sin 3 + 3 \cos 3$, $f_y(2, 1) = -2 \sin 3 + 3 \cos 3$.

ESERCIZIO 2

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = ye^x + e^x \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

SOLUZIONE

L'equazione è sia lineare del primo ordine che a variabili separabili. Risolvendola come lineare, possiamo prendere $A(x) = e^x$ e cercare la soluzione nella forma $y(x) = v(x)e^{e^x}$. Si trova $v(x) = \int e^{-e^x} e^x dx = -e^{-e^x} + C$ (l'integrale si calcola con la sostituzione $t = e^x$). Quindi la soluzione generale è: $y(x) = Ce^{e^x} - 1$. Imponendo la condizione iniziale, troviamo $C = 2e^{-1}$, e quindi la soluzione del problema è: $y(x) = 2e^{e^x - 1} - 1$.

Se la risolviamo come equazione a variabili separabili, troviamo $\int \frac{dy}{y+1} = \int e^x dx$, che integrata dà: $|y + 1| = e^x + C_1$. Quindi $y + 1 = \pm e^{C_1} e^{e^x}$, e sostituendo $\pm e^{C_1}$ con C ritroviamo l'integrale generale (recuperiamo anche la soluzione costante $y \equiv -1$, che comunque non interessa ai fini del nostro problema di Cauchy). Poi si può imporre la condizione iniziale come sopra.

ESERCIZIO 3
Calcolare il seguente integrale doppio: $\displaystyle\iint_C x\, dxdy$, dove $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x \leq 0, x^2 + y^2 - 2x \geq 0, y \geq 0\}$.

SOLUZIONE
In coordinate polari, l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} \rho^2 \cos\theta d\rho d\theta =& \frac{56}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta d\theta \\
=& \frac{56}{3}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 \theta d\theta \\
=& \frac{56}{3}\int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{4} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{(\cos 2\theta)^2}{4}\right] \theta d\theta \\
=& \frac{56}{3}\int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{4} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{1+\cos 4\theta}{8}\right] \theta d\theta \\
=& \frac{7}{2}\pi.
\end{aligned}$$

L'integrale in $d\theta$ si può calcolare anche per parti: si ha

$$\begin{aligned}
\int \cos^4\theta d\theta = \int \cos^3\theta \cos\theta d\theta &= \cos^3\theta \sin\theta + 3\int \sin^2\theta \cos^2\theta d\theta \\
&= \cos^3\theta \sin\theta + 3\int \cos^2\theta d\theta - 3\int \cos^4\theta d\theta
\end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$\int \cos^4\theta d\theta = \frac{1}{4}\left[\cos^3\theta \sin\theta + \frac{3}{2}\int (1+\cos 2\theta) d\theta\right] = \frac{1}{4}\cos^3\theta \sin\theta + \frac{3}{8}\theta + \frac{3}{16}\sin 2\theta + C,$$

e quindi ancora $\displaystyle\frac{56}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta d\theta = \frac{7}{2}\pi$.

L'itegrale doppio puó anche essere calcolato scrivendo $C = C_1 \setminus C_2$ (differenza insiemistica), dove $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x \leq 0, y \geq 0\}$ e $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0, y \geq 0\}$. Usando le coordinate polari $x = 2 + \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$ in C_2 e $x = 1 + \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$ in C_1, si trova:

$$
\begin{aligned}
\iint_C x\ dxdy &= \iint_{C_1} x\ dxdy - \iint_{C_2} x\ dxdy \\
&= \int_0^2 \int_0^\pi (2+\rho\cos\theta)\rho d\theta d\rho - \int_0^1 \int_0^\pi (1+\rho\cos\theta)\rho d\theta d\rho \\
&= \int_0^2 2\pi\rho d\rho - \int_0^1 \pi\rho d\rho = \frac{7}{2}\pi.
\end{aligned}
$$