

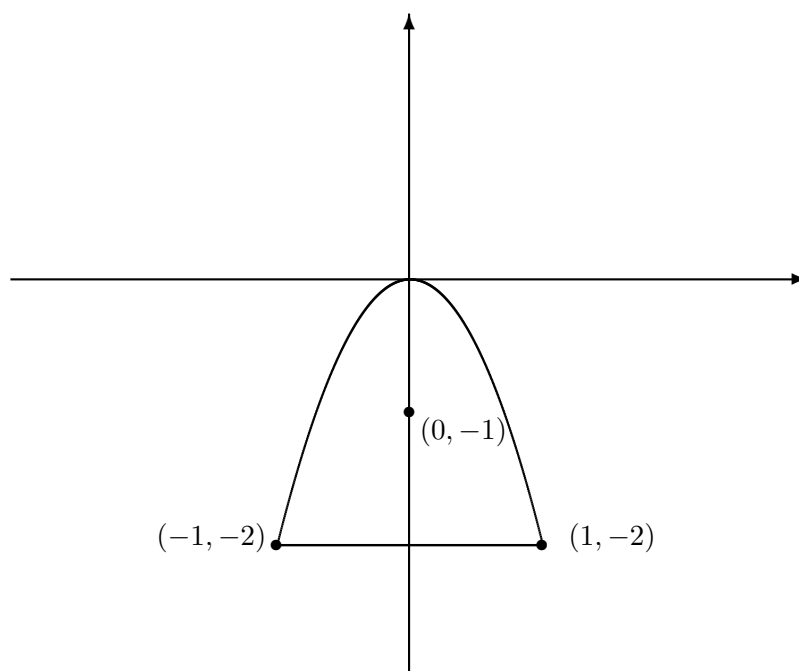
Soluzioni di un esercizio del compito del 18-01-2008

VERSIONE A

Determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = y^2 + 2x^2y + 2y + 4x^2$ nell'insieme delimitato dalla parabola $y = -2x^2$ e dalla retta $y = -2$.

SOLUZIONE

Il dominio racchiuso dalla retta e dalla parabola è: $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq -2x^2\}$:



Il dominio è chiuso e limitato, e la funzione è continua (è un polinomio). Quindi, per il Teorema di Weierstrass, minimo e massimo assoluto esistono. Essendo $f_x = 4xy + 8x$ e $f_y = 2y + 2x^2 + 2$, i punti stazionari della funzione si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 4xy + 8x = 0 \\ 2y + 2x^2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y + 2) = 0 \\ y + x^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Quindi deve essere $x = 0$, e troviamo il punto $(0, -1)$, oppure $y = -2$, e troviamo i punti $(\pm 1, -2)$. Comunque solo $(0, -1)$ è interno al dominio. Si può facilmente verificare che $(0, -1)$ è un punto di minimo relativo; a noi basta sapere che $f(0, -1) = -1$. Sulla frontiera del dominio si ha:

$$f(x, -2) = 4 - 4x^2 - 4 + 4x^2 \equiv 0 \quad \text{e} \quad f(x, -2x^2) = 4x^4 - 4x^4 - 4x^2 + 4x^2 \equiv 0,$$

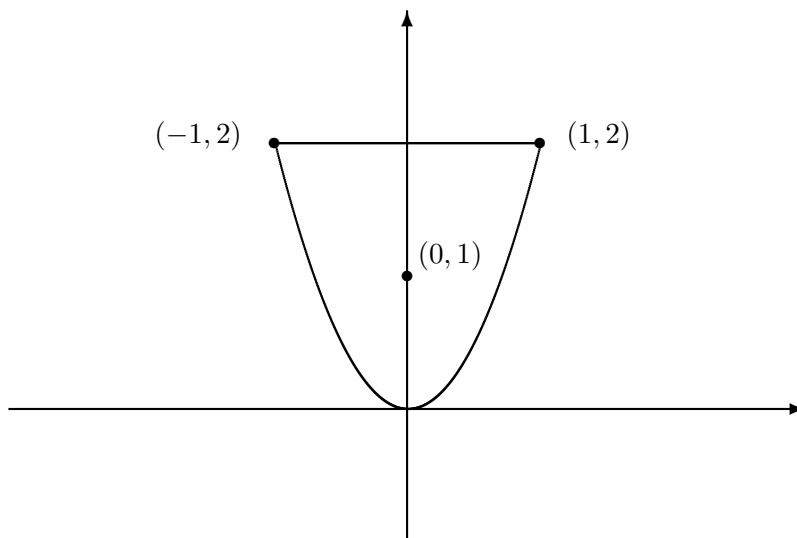
cioè la funzione è identicamente nulla (in effetti, si può notare che $f(x, y) = (2x^2 + y)(2 + y)$). In conclusione, il massimo della funzione nel dominio D è pari a 0, assunto in tutti i punti di frontiera, il minimo vale -1 ed è assunto solo nel punto $(0, -1)$.

VERSIONE B

Determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = y^2 - 2x^2y - 2y + 4x^2$ nell'insieme delimitato dalla parabola $y = 2x^2$ e dalla retta $y = 2$.

SOLUZIONE

Il dominio racchiuso dalla retta e dalla parabola è: $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 2\}$:



Il dominio è chiuso e limitato, e la funzione è continua (è un polinomio). Quindi, per il Teorema di Weierstrass, minimo e massimo assoluto esistono. Essendo $f_x = -4xy + 8x$ e $f_y = 2y - 2x^2 - 2$, i punti stazionari della funzione si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -4xy + 8x = 0 \\ 2y - 2x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2 - y) = 0 \\ y - x^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Quindi deve essere $x = 0$, e troviamo il punto $(0, 1)$, oppure $y = 2$, e troviamo i punti $(\pm 1, 2)$. Comunque solo $(0, 1)$ è interno al dominio. Si può facilmente verificare che $(0, 1)$ è un punto di minimo relativo; a noi basta sapere che $f(0, 1) = -1$. Sulla frontiera del dominio si ha:

$$f(x, 2) = 4 - 4x^2 - 4 + 4x^2 \equiv 0 \quad \text{e} \quad f(x, 2x^2) = 4x^4 - 4x^4 - 4x^2 + 4x^2 \equiv 0,$$

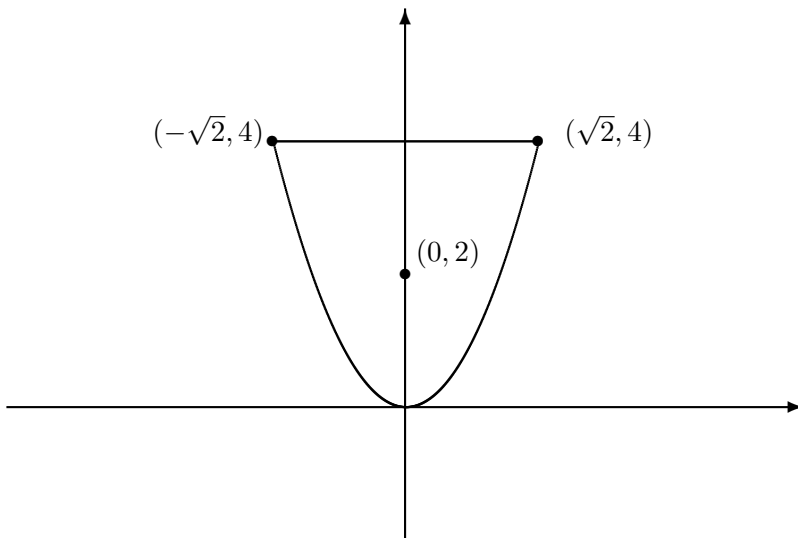
cioè la funzione è identicamente nulla (in effetti, si può notare che $f(x, y) = (y - 2x^2)(y - 2)$). In conclusione, il massimo della funzione nel dominio D è pari a 0, assunto in tutti i punti di frontiera, il minimo vale -1 ed è assunto solo nel punto $(0, 1)$.

VERSIONE C

Determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = y^2 - 2x^2y - 4y + 8x^2$ nell'insieme delimitato dalla parabola $y = 2x^2$ e dalla retta $y = 4$.

SOLUZIONE

Il dominio racchiuso dalla retta e dalla parabola è: $D = \{(x, y) : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, 2x^2 \leq y \leq 4\}$:



Il dominio è chiuso e limitato, e la funzione è continua (è un polinomio). Quindi, per il Teorema di Weierstrass, minimo e massimo assoluto esistono. Essendo $f_x = -4xy + 16x$ e $f_y = 2y - 2x^2 - 4$, i punti stazionari della funzione si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -4xy + 16x = 0 \\ 2y - 2x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(4 - y) = 0 \\ y - x^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Quindi deve essere $x = 0$, e troviamo il punto $(0, 2)$, oppure $y = 4$, e troviamo i punti $(\pm\sqrt{2}, 4)$. Comunque solo $(0, 2)$ è interno al dominio. Si può facilmente verificare che $(0, 2)$ è un punto di minimo relativo; a noi basta sapere che $f(0, 2) = -4$. Sulla frontiera del dominio si ha:

$$f(x, 4) = 16 - 8x^2 - 16 + 8x^2 \equiv 0 \quad \text{e} \quad f(x, 2x^2) = 4x^4 - 4x^4 - 8x^2 + 8x^2 \equiv 0,$$

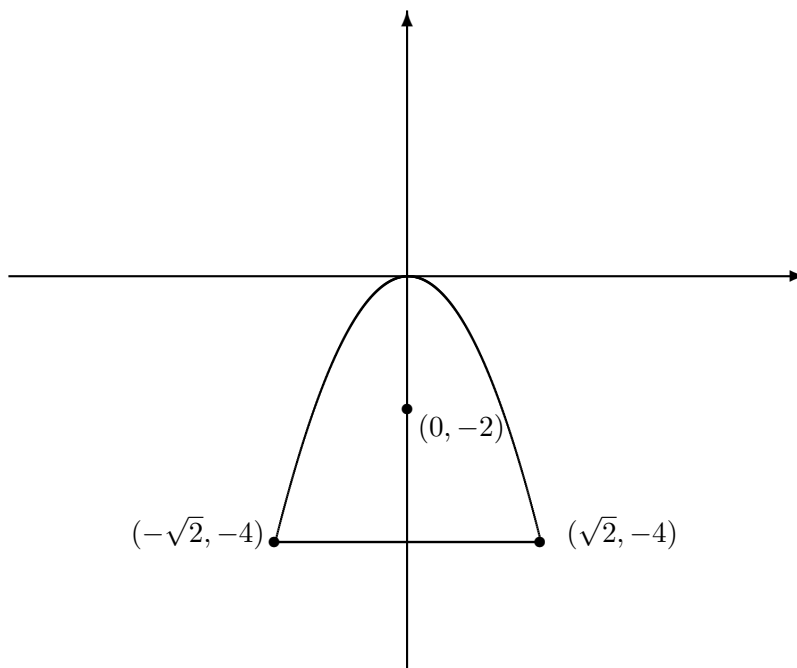
cioè la funzione è identicamente nulla (in effetti, si può notare che $f(x, y) = (y - 2x^2)(y - 4)$). In conclusione, il massimo della funzione nel dominio D è pari a 0, assunto in tutti i punti di frontiera, il minimo vale -4 ed è assunto solo nel punto $(0, 2)$.

VERSIONE D

Determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = y^2 + 2x^2y + 4y + 8x^2$ nell'insieme delimitato dalla parabola $y = -2x^2$ e dalla retta $y = -4$.

SOLUZIONE

Il dominio racchiuso dalla retta e dalla parabola è: $D = \{(x, y) : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, -4 \leq y \leq -2x^2\}$:



Il dominio è chiuso e limitato, e la funzione è continua (è un polinomio). Quindi, per il Teorema di Weierstrass, minimo e massimo assoluto esistono. Essendo $f_x = 4xy + 16x$ e $f_y = 2y + 2x^2 + 4$, i punti stazionari della funzione si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 4xy + 16x = 0 \\ 2y + 2x^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y + 4) = 0 \\ y + x^2 + 2 = 0. \end{cases}$$

Quindi deve essere $x = 0$, e troviamo il punto $(0, -2)$, oppure $y = -4$, e troviamo i punti $(\pm\sqrt{2}, -4)$. Comunque solo $(0, -2)$ è interno al dominio. Si può facilmente verificare che $(0, -2)$ è un punto di minimo relativo; a noi basta sapere che $f(0, -2) = -4$. Sulla frontiera del dominio si ha:

$$f(x, -4) = 16 - 8x^2 - 16 + 8x^2 \equiv 0 \quad \text{e} \quad f(x, -2x^2) = 4x^4 - 4x^4 - 8x^2 + 8x^2 \equiv 0,$$

cioè la funzione è identicamente nulla (in effetti, si può notare che $f(x, y) = (2x^2 + y)(4 + y)$). In conclusione, il massimo della funzione nel dominio D è pari a 0, assunto in tutti i punti di frontiera, il minimo vale -4 ed è assunto solo nel punto $(0, -2)$.