Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli
20 Gennaio 2017

Esercizio 1. *Si considerino i seguenti tre punti dello spazio euclideo:*

$$P := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad R := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. *Dimostrare che P, Q ed R non sono collineari.*
2. *Calcolare il perimetro del triangolo di vertici P, Q ed R.*
3. *Calcolare l'area del triangolo di vertici P, Q ed R.*
4. *Calcolare la distanza di P dalla retta passante per Q ed R.*

Esercizio 2. *Sia $T_k : \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ l'operatore lineare definito da*

$$T_k(p)(t) := p(0)(1+t) + p'(0)(2t + kt^2) + \frac{1}{2}p''(0)(kt + 2t^2)$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$; dove p' e p'' denotano la derivata prima e seconda di p, rispettivamente e la notazione $q(0)$ denota la valutazione del polinomio q nel numero 0.

1. *Scrivere la matrice che rappresenta T_k nella base standard $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ di $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$;*
2. *Determinare la dimensione dell'immagine e del nucleo di T_k in funzione di $k \in \mathbb{R}$;*
3. *Determinare lo spettro (reale) di T_k in funzione di $k \in \mathbb{R}$;*
4. *Determinare gli autospazi di T_k, in funzione di $k \in \mathbb{R}$;*
5. *Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo T_k è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.*

Esercizio 3. *Ridurre a forma canonica affine la conica $\mathcal{C}_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, p(x, y) = 0\}$ dove $p(x, y) := x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 3y + 2$.*

Esercizio 4. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 8 & 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. *Trovare equazioni parametriche e cartesiane per l'immagine di A;*

2. *Trovare equazioni parametriche e cartesiane per il nucleo di A;*

3. *Sia* $\mathbf{b} := (-1, 5, 13)^t$. *Descrivere l'insieme dei vettori $X \in \mathbb{R}^4$ tali che $AX = \mathbf{b}$.*

4. *L'insieme di tutti i vettori $X \in \mathbb{R}^4$ tali che $AX = \mathbf{b}$, trovato nel punto precedente, è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? (Giustificare la risposta)*

Esercizio 5. *Si consideri il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ dato dalle seguenti equazioni cartesiane:*

$$\begin{cases} 2x - y & = & 0 \\ x - z + 2w & = & 0 \end{cases}$$

1. *Trovare una base per U;*

2. *Trovare una base ortonormale di U (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$);*

3. *Si consideri il vettore $P = (1, 2, 0, 2)^T$ di $\mathbb{R}^4$. Trovare la proiezione ortogonale di P su U (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$);*

4. *Calcolare la distanza di P da U (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$);*

5. *Trovare equazioni parametriche per la retta ortogonale a U e passante per P (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$).*