Nome, Cognome e Matricola

Prova scritta di Geometria 1
Ingegneria Civile
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

13 Settembre 2017

Esercizio 1. *Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, dipendente da un parametro reale k:*

$$\begin{cases} x + 2z & = & 1, \\ 2x + y + 3z & = & 3, \\ kx + 2k^2 z & = & 2k - 1. \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di k tale sistema ammette soluzioni e, quando possibile, determinarle.

Esercizio 2. *Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^5$*:*

$$U = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

e

$$V = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$

1. *Trovare base e dimensione di* U *e di* V*;*
2. *Trovare base e dimensione di* $U \cap V$*;*
3. *Trovare equazioni cartesiane per* U*, per* V *e per* $U \cap V$*.*

Esercizio 3. *Si considerino i seguenti punti dello spazio euclideo tridimensionale:*

$$P_1 = (3, 1, 0), P_2 = (1, 1, 1), P_3 = (3, 2, 1), P_4 = (0, -2, 3), P_5 = (6, -2, 0).$$

1. *Determinare forma parametrica e forma cartesiana del piano π passante per i punti P_1, P_2, P_3.*

2. *Determinare forma parametrica e forma cartesiana della retta r passante per i punti P_4, P_5.*

3. *Determinare la posizione reciproca di π e r e calcolarne la distanza.*

4. *Determinare tutti i punti di π che hanno distanza minima dalla retta r.*

Esercizio 4. *Ridurre a forma canonica affine la conica* $\mathcal{C}_p$ *di equazione*

$$p(X) := x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0.$$

Esercizio 5. *Sia* $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ *lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale ad* n.

1. *Mostrare che i tre vettori* $e_1 = x + 1$, $e_2 = x + 2$, $e_3 = x^2 + x + 1$ *formano una base di* $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.
2. *Mostrare che i due vettori* $f_1 = x + 3$, $f_2 = x + 4$ *formano una base di* $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$
3. *Scrivere la matrice che rappresenta l'applicazione lineare*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} &\longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 1} \\ p(x) &\longmapsto p(x+1) - p(x-1) \end{aligned}$$

   rispetto alle basi $\{e_1, e_2, e_3\}$ *e* $\{f_1, f_2\}$.

4. *Determinare base e dimensione del nucleo e dell'immagine di* ϕ.