Esercizi Di Geometria 1

SETTIMANA 1
(26 Settembre – 2 Ottobre 2016)

Esercizio 1. Siano A, B e C tre insiemi. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
2. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Esercizio 2. Consideriamo gli insiemi $A := \{a \in \mathbb{Z} | \, a^2 - 9 \leq 0\}$ e $B := \{b \in \mathbb{Z} | -1 \leq b \leq 3\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$ e $\mathbb{Z} \setminus A$.

Esercizio 3. Determinare $A \cup B$ e $A \cap B$ nei seguenti casi:

1. $A := \{3n | \, n \in \mathbb{N}\}$ e $B := \{b \in \mathbb{Z} | -1 \leq b \leq 6\}$;
2. $A, B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dati da $A := \{(0, y) | \, y \in \mathbb{R}\}$ e $B := \{(x, y) | \, x \geq 0, \, y = 1\}$.

Esercizio 4. Dimostrare che una funzione $f : A \to B$ é bigettiva se e solo se esistono due funzioni $g_1, g_2 : B \to A$ tali che $f \circ g_1 = id_B$ e $g_2 \circ f = id_A$ (si ricordi che id_X denota la funzione identitá $id_X : X \to X$ data da $x \mapsto x$ per ogni $x \in X$).

Esercizio 5. Sia $f : A \to B$ una funzione, e $A_1, A_2 \subseteq A$ due sottoinsiemi di A. Dimostrare che si ha $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ ma che $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. Trovare un esempio in cui $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

Esercizio 6. Sia $f : A \to B$ una funzione e $B_1 \subseteq B$ un sottoinsieme qualsiasi di B. Dimostrare che $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$ e trovare un esempio in cui non vale l'uguaglianza.

Esercizio 7. Quali delle seguenti funzioni *non* sono iniettive, e perché?

1. $f_1(x) = 3x + 2$;
2. $f_2(x) = \frac{1}{x^2} + x^4$;
3. $f_3(x) = x^3 - 2$;
4. $f_4(x) = 6x^2 - 3$.

Esercizio 8. Per le seguenti coppie di funzioni reali di variabile reali (definite su un opportuno sottoinsieme di $\mathbb{R}$) scrivere l'espressione di $f \circ g$ e $g \circ f$, e determinarne il dominio:

1. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 4x^3 - 3$;
2. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2$;
3. $f(x) = x^{-2}$, $g(x) = x^2 + 2$;
4. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$.

Esercizio 9. Consideriamo l'insieme $X = \{0, 1, 2\}$. Si considerino le due operazioni $+, \cdot : X \times X \to X$ su X definite come segue

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Dimostrare che la tripla $(X, +, \cdot)$ cosi ottenuta ha le proprietá di campo.

Esercizio 10. Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni. Dimostrare che se $g \circ f$ é suriettiva, allora anche g é suriettiva. Trovare un esempio in cui $g \circ f$ é suriettiva ma f non lo é.