Esercizi Di Geometria 1

SETTIMANA 2
(3 – 9 Ottobre 2016)

Esercizio 1. Verificare che

$$(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}) + \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1} + (\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3})$$

quando tre dei punti O, A_1, A_2, A_3 sono allineati.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{B} := \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una terna di vettori non complanari in $\mathcal{V}^3_O$. Seguendo la traccia di quanto fatto nel piano, si definisca una funzione $F_\mathcal{B} : \mathcal{V}^3_O \to \mathbf{R}^3$e una somma ed un prodotto per scalari su $\mathbf{R}^3$ in modo che $F_\mathcal{B}$ sia un *isomorfismo* di spazi vettoriali, ovvero sia bigettiva e rispetti la somma ed il prodotto per scalari:

$$F_\mathcal{B}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}) = F_\mathcal{B}(\overrightarrow{OA_1}) + F_\mathcal{B}(\overrightarrow{OA_2}) \qquad F_\mathcal{B}(\lambda \overrightarrow{OA}) = \lambda F_\mathcal{B}(\overrightarrow{OA})$$

per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA} \in \mathcal{V}^3_O$.

Esercizio 3. Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ una base di $\mathcal{V}^2_O$ e si considerino i vettori geometrici $\overrightarrow{OA_a} := 2\vec{i} + a\vec{j}$ e $\overrightarrow{OB} := \vec{i} - \vec{j}$, dove $a \in \mathbb{R}$. Trovare per quali $a \in \mathbb{R}$ i due vettori non sono proporzionali, e per quei valori si calcolino le coordiante di $\overrightarrow{OC} := \vec{i} + 2\vec{j}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_a := \{\overrightarrow{OA_a}, \overrightarrow{OB}\}$.

Esercizio 4. Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base di $\mathcal{V}^3_O$. Dati i vettori $\overrightarrow{OA} := 2\vec{i} - 3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} := 2\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\overrightarrow{OC} := -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, si trovino le coordinate (rispetto a $\mathcal{B}$) dei vettori $\overrightarrow{OD_1} := \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD_2} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

Esercizio 5. Fissato un riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ di $\mathcal{A}^3$, si considerino i vettori geometrici $\overrightarrow{OA} := 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} := 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ e

$\pi := \text{Span}\,(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Verificare che π é un piano. Verificare che la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t-2 \\ y = 3t-1 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t+1 \end{cases}$$

é contenuta nel piano π.

Esercizio 6. Data una base $\mathcal{B} := \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ di $\mathcal{V}^3_O$, dimostrare che i tre vettori geometrici

$$\overrightarrow{OA} := \vec{i} + \vec{j}, \quad \overrightarrow{OB} := \vec{j} + \vec{k}, \quad \overrightarrow{OC} := \vec{i} + \vec{k}$$

non sono complanari.

Esercizio 7. Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ una base di $\mathcal{V}^2_O$, e si considerino i due vettori geometrici $\overrightarrow{OA} := \vec{i} + 2\vec{j}$ ed $\overrightarrow{OB} := 2\vec{i} - \vec{j}$. Verificare che $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ non sono proporzionali, e trovare le coordinate di $\overrightarrow{OC} := \vec{i} + 3\vec{j}$ rispetto alla base $\mathcal{B}' := \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$.

Esercizio 8. Fissata una base $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ di $\mathcal{V}^3_O$, si considerino i vettori geometrici $\overrightarrow{OA} := \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ e $\overrightarrow{OB} := 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e si consideri anche $\pi := \text{Span}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Si verifichi che π é un piano. Trovare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ (se ne esistono) la retta r_k di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 3 + (k+1)t \\ y = 3 + k - t \\ z = k + 2t \end{cases}$$

é contenuta nel piano π.

Esercizio 9. Fissato un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ di $\mathcal{A}^3$, trovare l'equazione parametrica della retta r passante per i due punti di coordinate rispettivamente $\begin{vmatrix} 1 \\ e \\ \sqrt{2} \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} -1 \\ 3e \\ 2\sqrt{2}+\sqrt{3} \end{vmatrix}$. Verificare che $\begin{vmatrix} 3 \\ -e \\ -\sqrt{3} \end{vmatrix} \in r$.

Esercizio 10. Fissato $RA(O, \vec{i}, \vec{j})$ nel piano, si consideri la retta r di equazioni parametriche $x = 1 - 3t$, $y = 2 + t$ $(t \in \mathbb{R})$ e la retta s_a passante per i punti $\begin{vmatrix} 0 \\ a \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$, dove $a \in \mathbb{R}$. Trovare per quali valori di a le rette r ed s_a si intersecano e determinare le coordinate del punto di intersezione (quando esiste).