Esercizi Di Geometria 1

SETTIMANA 4
(17 – 23 Ottobre 2016)

Gli esercizi sono parialmente presi dal libro di testo del corso "Geometria Analitica con elementi di Algebra Lineare" di M. Abate e C. De Fabritiis.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\mathcal{B} := \{v_1, \cdots, v_k\}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di V. Sia $W := Span(v_1, \cdots, v_k)$. Dimostrare che l'applicazione $F_{\mathcal{B}} : W \to \mathbb{R}^k$ definita da

$$F_{\mathcal{B}}(x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_kv_k) = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$$

è iniettiva, suriettiva e preserva le operazioni (ovvero $F_{\mathcal{B}}(w_1+w_2) = F_{\mathcal{B}}(w_1)+F_{\mathcal{B}}(w_2)$ e $F_{\mathcal{B}}(\lambda w_1) = \lambda F_{\mathcal{B}}(w_1)$ per ogni $w_1, w_2 \in W$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$).

Esercizio 2. Ricopiare la dimostrazione del teorema del completamento convincendosi che sia ben fatta.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 4}[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 4 (in una variabile t). Si considerino i seguenti vettori di V:

$$p_1(t) := 3t - 7t^3 + t^4, \quad p_2(t) := 2 + t^2, \quad p_3(t) := 3t - 7t^3 + 2t^4.$$

Dimostrare che $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ é linearmente indipendente e completarlo ad una base di V.

Esercizio 4. Per quali polinomi $p \in \mathbb{R}[t]$ il grafico $\Gamma := \{(t, p(t)) | \, r \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$?

Esercizio 5. Sia $V_c := \{p \in \mathbb{R}_{\leq 7}[t] | \, p(1) = c\}$. Per quali valori di $c \in \mathbb{R}$, l'insieme V_c é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leq 7}[t]$?

Esercizio 6. Dimostrare che i tre insiemi

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_3 := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

sono basi di $\mathbb{R}^2$. Trovare le coordinate dei vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alle tre basi $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$.

Esercizio 7. Sia $E_{ij} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ la matrice che ha 1 al posto (i,j) e 0 altrove. Dimostrare che l'insieme $\mathcal{B} := \{E_{ij} |\, 1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n\}$ é una base di $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Esercizio 8. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e prendiamo $w_1, \cdots, w_p \in V$. Dimostrare che se $p < n$ allora $\{w_1, \cdots, w_p\}$ non è un sistema di generatori di V.

Esercizio 9. Siano U e W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V con $V = U + W$. Siano $\mathcal{B}$ una base di W e $\mathcal{C}$ una base di U. Mostrare che se $U \cap W = \{0_V\}$ allora $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ é una base di $U + W = V$. Trovare un esempio in cui $U \cap W \neq \{0_V\}$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ non è una base di V.

Esercizio 10. Sia V uno spazio vetttoriale di dimensione n. Sia W un sottospazio vettoriale di V. Un *supplementare* di W é un sottospazio vettoriale U di V tale che $U + W = V$ e $U \cap W = \{0_V\}$. Dimostrare che ogni sottospazio vettoriale W di V ammette un complementare. (Suggerimento: usare il teorema del completamento).

Esercizio 11. Sia $\nu_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Trovare quattro supplementari distinti di $\mathbb{R}\nu_0 \subset \mathbb{R}^2$.

Esercizio 12. Nello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali, si considerino i sottoinsiemi:

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} |\, a + b - c + d = 0 \right\}, \quad W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} |\, a = d,\, b = c \right\}.$$

1. Dimostrare che U e W sono sottospazi vettoriali di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
2. Determinare i sottospazi $U + W$ e $U \cap W$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 13. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_2[t]$ dei polonomi di grado minore o uguale di 2 (in una variabile t) si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$\begin{aligned} U_1 &:= \mathrm{Span}(1 - t, t^2, 1 - t + t^2); \\ U_2 &:= \mathrm{Span}(t, 1 + t^2, 2 - t + 2t^2, t^2); \\ U_3 &:= \mathrm{Span}(1, 1 + t, 2t, t + t^2). \end{aligned}$$

Determinare una base e la dimensione di ciascuno di loro.