Esercizi Di Geometria 1

SETTIMANA 6
(31 Ottobre – 6 Novembre 2016)

Gli esercizi sono parialmente presi dal libro di testo del corso “Geometria Analitica con elementi di Algebra Lineare” di M. Abate e C. De Fabritiis.

Esercizio 1. Per ognuno dei seguenti sottospazi vettoriali, trovare un complementare (anche detto “supplementare”) nello spazio vettoriale di riferimento:

1.
$$U := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 |\, x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0,\ -x_3 + 10x_4 = 0\};$$

2.
$$U := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0,\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - 2x_3 = 0\};$$

3.
$$U := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^3 |\, ix_1 + (3+2i)x_2 + 3x_3 = 0,\ x_1 - 4ix_2 + (1+i)x_3 = 0,\ 2ix_2 - (3+2i)x_3 = 0\};$$

4.
$$U := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^4 |\, x_1 - 2ix_2 + (3+2i)x_4 = 0,\ x_2 - 4ix_3 + (1+i)x_4 = 0\}.$$

Esercizio 2. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'unica applicazione lineare tale che

$$\begin{aligned} T(e_1) &= 2e_1 + 3e_2 - \sqrt{2}e_3, \\ T(e_2) &= 2\sqrt{2}e_1 + (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})e_2 + (-2 - 3\sqrt{3})e_3 + 5\sqrt{3}e_4 \\ T(e_3) &= 2e_2 - 3e_3 + 5e_4. \end{aligned}$$

Determinare la dimensione del nucleo di T, la dimensione dell'immagine di T, una loro base ed un loro complementare.

Esercizio 3. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$T(e_1) = e_1 + e_2, \quad T(e_2) = e_1 - e_2 + e_3 \quad T(e_3) = 2e_1 + e_3, \quad T(e_4) = 2e_2 - e_3.$$

Determinare la dimensione del nucleo di T, la dimensione dell'immagine di T, una loro base ed un loro complementare.

Esercizio 4. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$L(e_1) = e_1 + e_3, \quad L(e_2) = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3 \quad L(e_3) = 3e_1 + 2e_2 + 4e_3,$$

e per ogni $c \in \mathbb{R}$ sia $M_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$M_c(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = ce_1 + 2e_2 + 2e_3, \quad M_c(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = 2e_2 + ce_3.$$

Trovare per quali $c \in \mathbb{R}$ si ha $\mathrm{Im}\, L = \mathrm{Im}\, M_c$, e calcolare la dimensione di $\mathrm{Im}\, L \cap \mathrm{Im}\, M_c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale, e siano U e W due suoi sottospazi vettoriali tali che $V = U \oplus W$. Dimostrare che ogni elemento v di V si scrive in maniera unica come somma $v = u + w$ di un elemento $u \in U$ e di un elemento $w \in W$. Si definisca la funzione $P_U : V \to U$ data da $P_U(v = u + w) = u$. Si dimostri che P_U é una funzione (ben definita) lineare, e suriettiva. Tale funzione si chiama *proiezione su U lungo W*.

Esercizio 6. Sia $A \in Mat_{4\times 3}(\mathbb{R})$ data da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -\sqrt{2} & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

e si consideri la decomposizione di $\mathbb{R}^3$ indotta da A. Sia $P = P_{KerA}$ la proiezione su $KerA$ relativa a tale decomposizione. Si determinino i seguenti vettori: $P(e_1)$, $P(e_1 + e_2)$, $P(e_3)$, $P(e_2)$.

Esercizio 7. Determinare tutte le soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_2 - x_2 + x_3 + 7x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 8. Studiare (ovvero discutere l'esistenza di soluzioni e nel caso trovarle) i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 4x + y + z + 2v + 3w = 0 \\ 14x + 2y + 2z + 7v + 11w = 0 \\ 15x + 3y + 3z + 6v + 10w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 4y + 7z = 3 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + 3y + 5z = 2 \end{cases}$$

Esercizio 9. Studiare i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 4y - z - 2w = 0 \\ \sqrt{5}x + 7y - 2z - 3w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Esercizio 10. Studiare i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + z = 1 \\ \sqrt{2}x + 3y - z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Esercizio 11. Studiare i seguenti sistemi lineari a coefficienti complessi:

$$\begin{cases} x + iy + z = 1 \\ 5x - (2 - i)y + iz = 2 \\ (1 + i)x + y - 2iz = 4 - 3i \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + ix_2 + (2 - 3i)x_3 = 1 + i \\ x_1 - 2ix_2 + 2x_3 = 4 \\ (1 - 3i)x_1 + ix_2 - (4 + 9i)x_3 = i - 3 \end{cases}$$

Esercizio 12. Trovare dimensione e base del nucleo e dell'immagine di A, B, A^T, B^T, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & \pi \end{pmatrix}$$

Esercizio 13. Sia $U = Span(u_1, u_2)$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e sia $W = Span(w_1, w_2, w_3)$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si determini dimensione e base di $U \cap W$ e di $U + W$.